

量指標をもつゼータ函数 [改訂版]^{*}

佐藤 篤[†]

本稿は Tate の学位論文

J. T. Tate, Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions,
in *Algebraic Number Theory* (J. W. S. Cassels and A. Fröhlich eds.),
Academic Press, London, 1967, Chap. XV, pp. 305–347

の私的な勉強ノートの改訂版である。旧版 (1994 年 9 月版) は, 上記の論文をテキストにして行われた 1993 年度八王子数論サマーセミナー^{*1} のノートを $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ で清書したもので, 1990 年度に筆者が徳能康・小林田狭の両氏と共にに行ったセミナーのノートをその下敷きにしてある。2003 年度に同じテキストで大学院生とセミナーを行ったのを機に大幅に書き直した。

本稿は決して原論文の翻訳などではなく (§1 ですら翻訳と呼べる代物ではない), 筆者の“趣味”に従って大幅に手を抜いたり手を加えたりしてある。また, 位相群に関する予備知識のまとめと古典的な Hecke の指標や L -函数に関する注意を最後に付け加えてある。

筆者のノートの不備な点を気付かせてくれたサマーセミナーや院セミナーの参加者の方々, その中でも特に 1990 年度のセミナーにも付き合ってくれた徳能康・小林田狭の両氏, ならびに“ノートお願いね”と本稿の旧版を書く決心をさせてくれた平田典子氏に深く感謝したい。

^{*}[2015 年 8 月 20 日版]

[†]東北学院大学教養学部 (E-mail: atsushi@mail.tohoku-gakuin.ac.jp)

^{*1}1993 年 8 月 1 日–5 日, 於 (財) 大学セミナー・ハウス (八王子市下柚木), 世話人: 村田玲音, 松本耕二, 平田典子。

目次

1	序	4
1.1	歴史	4
1.2	本論文	4
1.3	予備知識	5
2	局所的理論	6
2.1	序	6
2.2	加法的な指標と測度	6
2.3	乗法的な指標と測度	10
2.4	局所的ゼータ函数と函数等式	13
2.5	特別なゼータ函数に対する $\rho(c)$ の計算	17
3	制限直積	24
3.1	序	24
3.2	指標	26
3.3	測度	28
4	大域的理論	33
4.1	加法的理論	33
4.2	Riemann-Roch の定理	37
4.3	乗法的理論	40
4.4	大域的ゼータ函数と函数等式	46
4.5	古典的理論との比較	50
	参考文献	58
	付録 A 位相群論からの準備	59
A.1	Haar 測度	59
A.2	指標群	61
A.3	Fourier 解析	62
	付録 B Hecke の指標と L-函数	64
B.1	Hecke の指標	64
B.2	L -函数の函数等式	66

B.3	L -函数の極と留数	68
B.4	Dirichlet の L -函数	68

1 序

1.1 歴史

Dedekind のゼータ関数の解析接続と函数等式を任意の代数体に対して証明することに成功したのは Hecke が最初であった。彼は、間もなく自分が用いた手法が Dedekind のゼータ関数や L -関数だけではなく、新しい形のイデアル指標 — 単項イデアルに対しては、生成元の“導手”を法とする類だけではなく、その共役元の複素平面上での位置にも依存して値が定まるような指標 — をもつゼータ関数にも適用できることに気付き、非常に込み入った計算の後にそれら“Hecke のゼータ関数”が Dedekind のゼータ関数と同じ形ではあるがより複雑な因子を伴った函数等式をみたとを示した ([4])。

Chevalley [3] は、類体論から解析的な議論を消し去る目的でなされた仕事の中で、イデアル群の改良版としてイデール群の概念を導入した。彼が発見したイデールを用いる手法は、類体論の記述や証明に最適であるだけでなく、代数的数論全般に対して極めて有効である。そのことを実証したのは Artin と Whaples [1] である。彼等はイデールの加法版としてアデール^{*2}を定義し、それらを用いて代数的数論の基本的な定理の全てを単純な公理から導いて見せた。

Artin の学生であった Matchett [5] は、上の手法を押し進め、イデールやアデールを用いた解析数論を初めて展開した。彼女は古典的なゼータ関数をイデール群上の積分として再定義し、Hecke の指標をイデール群の指標が引き起こすイデール群の指標として定式化することに成功した。しかし函数等式の証明は Hecke の方法に依っている。

1.2 本論文

Artin は、アデールやイデールのなす空間における解析を Matchett よりも徹底して用いることにより、ゼータ関数の概念を拡張し、それらの解析接続や函数等式の証明を単純化することを考えてみたらどうかと私に勧めてくれた。本論文で述べていることは、彼の示唆に基づいて私が得た結果である。古典的なゼータ関数の概念 — ある種のイデール指標の整イデールに渡る和 — はイデールに関する対応する概念、すなわち重み函数と体の上では自明であるようなイデール指標とを掛けたものをイデール群上で積分したもの、で置き換えられる。Hecke の方法においては、テータ函数 — ユークリッド空間内の格子上の点に渡る或る種の和 — の変換公式が重要な役割を演じていたが、その公式は複雑なものであった。我々の方法においては、テータ函数の代わりにアデール環上で定義された函数を (アデール環に離散的に埋め込まれた) 代数体に属する数全体に渡って足し合わせたものを考え、単純な Poisson の和公式がテータ公式の代わりを果たす。Poisson の和公式は、それ自身重要なものであるが、Riemann-Roch の定理の数論における類似物であるとも考

^{*2}原論文では“アデール”でなく“付値ベクトル”(valuation vector)という言葉が使われている。

えられる。この公式を用いることにより、一般化されたゼータ函数の解析接続が一挙に得られ、それらが簡潔な函数等式をみたすことが導かれる。それらの結果を古典的な言葉で書き直すことにより Hecke が示した函数等式が得られ、そこに現れた複雑な因子が無限素点と導手の素因子とから生じる局所因子の積であることが明らかとなる。それらの因子の局所的な定義を与えるために局所ゼータ函数という概念を導入するが、その計算結果の一覧も与えておいた^{*3}。

1.3 予備知識

数論については、古典的な代数的数論およびそれらと局所体の理論との関係のみを既知とし、イデールやアデールに関する知識は要求しない。イデール群やアデール環の定義や構造、ならびにそれらの上での解析については本文中で詳しく述べる。

解析に関しては、複素解析の基礎のみを既知とする。古典的な解析数論について知っておく必要はない。その代わりに、局所コンパクトアーベル群における抽象的な Fourier 解析についての基本的な事実を知っておく必要がある^{*4}。

^{*3}原論文では、このあとに Artin への謝辞が述べられている。

^{*4}原論文では、“基本的な事実”を簡単に説明し、文献として [2] を紹介している。本稿では、必要とされる定義や定理等を付録 A にまとめておいた。

2 局所的理論

2.1 序

本節を通して k で有限次代数体の素点 $\mathfrak{p}$ における完備化を表す. すなわち $\mathfrak{p}$ が無限素点ならば k は実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ であり, $\mathfrak{p}$ が有限素点ならば k はいわゆる $\mathfrak{p}$ -進体になる. いずれの場合にも k は素点 $\mathfrak{p}$ より定まる位相に関して完備な位相体になる.

$\mathfrak{p}$ の下にある $\mathbb{Q}$ の素点を p とし, p における $\mathbb{Q}$ の完備化を R で表す. k が $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ ならば $R = \mathbb{R}$ であり, k が $\mathfrak{p}$ -進体ならば R は p -進体 $\mathbb{Q}_p$ となる. また, 拡大 k/R に関するトレースを S で表す^{*5}. これは連続な (加法に関する) 全射準同型である.

k が $\mathfrak{p}$ -進体の場合には, さらに次のように記号を定める: ord を正規化された加法付値, $\mathfrak{o}$ を付値環, $\mathfrak{p}$ を付値イデアルとし, 剰余体 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ の元の個数 (これは有限) を $N\mathfrak{p}$ で表す. また, k の (絶対) 共役差積を $\mathfrak{d}$ で表す:

$$\mathfrak{d}^{-1} = \{ \alpha \in k ; S(\alpha\mathfrak{o}) \subseteq \mathbb{Z}_p \}.$$

さらに素元 π を固定しておく (円周率も同じく π で表すが混乱の恐れはない).

素点 $\mathfrak{p}$ に属する k の付値の中から, 正規化された付値 $\|\cdot\|$ を

$$\|\alpha\| := \begin{cases} |\alpha| & k = \mathbb{R} \text{ の場合} \\ |\alpha|^2 & k = \mathbb{C} \text{ の場合} \\ N\mathfrak{p}^{-\text{ord } \alpha} & k \text{ が } \mathfrak{p}\text{-進体の場合} \end{cases}$$

により定める^{*6} (このように正規化する理由は補題 2.2.5 で明らかになる).

体 k は局所コンパクトである. より正確には: k の部分集合 C が相対コンパクトであるためには C が付値に関して有界であることが必要かつ十分である. 実際, $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ に対してはこれはよく知られた事実であり, $\mathfrak{p}$ -進体に対しても剰余体の有限性を使ってこのことが示される.

2.2 加法的な指標と測度

体 k の加法群を同じく k で表し^{*7}, その一般の元を ξ と書くことにする.

まず, k の指標群 $\widehat{k}$ の構造を決定することを考える.

補題 2.2.1 $X \in \widehat{k}$ を自明でない指標とし, 各 $\eta \in k$ に対して $X_\eta \in \widehat{k}$ を $X_\eta(\xi) := X(\eta\xi)$ により定める. このとき, 写像

$$\iota : k \ni \eta \longmapsto X_\eta \in \widehat{k}$$

^{*5}原論文ではトレースは $S_{k/R}$ で表されている.

^{*6}原論文では正規化された付値に $|\cdot|$ が使われているが, 通常の絶対値と区別するため $\|\cdot\|$ を用いた.

^{*7}原論文では k の加法群は k^+ で表されている.

は位相群としての同型を与える.

[証明] (1) まず写像 $\xi \mapsto \eta\xi$ が k からそれ自身への連続な準同型であることより, $X_\eta \in \widehat{k}$ となることは問題ない. また ι が抽象群としての準同型であることは明らかで, $\eta \in k$ に対して

$$X_\eta(\xi) = 1 \quad \forall \xi \in k \implies X(\eta k) = \{1\} \implies \eta k \neq k \implies \eta = 0$$

が成り立つことより ι は単射である.

(2) $\xi \in k$ に対して

$$X_\eta(\xi) = 1 \quad \forall \eta \in k \implies X(k\xi) = \{1\} \implies k\xi \neq k \implies \xi = 0$$

が成り立つことより, $\text{Im } \iota$ の零化群は $\{0\}$ となる. これより $\text{Im } \iota$ は $\widehat{k}$ において稠密であることがわかる.

(3) ι は連続であることを示す. B を k のコンパクトな部分集合, U を $\mathbb{T}$ における 1 の開近傍とし, $W(B, U) := \{\chi \in \widehat{k}; \chi(B) \subseteq U\}$ と置く. B がコンパクトであることより,

$$\exists M > 0 \quad \text{s.t.} \quad \|\xi\| \leq M \quad \forall \xi \in B.$$

また X が連続であることより,

$$\exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad \|\xi\| < \delta \implies X(\xi) \in U.$$

このとき $\eta \in k$ に対して

$$\|\eta\| < \delta/M \implies \|\xi\| < \delta \quad \forall \xi \in \eta B \implies X_\eta(B) \subseteq U$$

が成り立つ. つまり, 開球 $\{\eta \in k; \|\eta\| < \delta/M\}$ の ι による像は $W(B, U)$ に含まれる. 従って ι は $\eta = 0$ で連続である.

(4) $\iota: k \rightarrow \text{Im } \iota$ は開写像であることを示す ($\iota: k \rightarrow \widehat{k}$ が開写像であることを主張しているのではないことに注意). $\varepsilon > 0$ と $X(\xi_0) \neq 1$ なる $\xi_0 \in k$ をとり, $\mathbb{T}$ における 1 の開近傍 U で $X(\xi_0) \notin U$ なるものとする. このとき $B := \{\xi \in k; \|\xi\| \leq \|\xi_0\|/\varepsilon\}$ はコンパクトで, $\eta \in k$ に対して

$$X_\eta(B) \subseteq U \implies \xi_0 \notin \eta B \implies \|\eta\| < \varepsilon$$

が成り立つ. つまり, $W(B, U) \subseteq \widehat{k}$ を (3) と同様に定めるとき, $\text{Im } \iota \cap W(B, U)$ は開球 $\{\eta \in k; \|\eta\| < \varepsilon\}$ の ι による像に含まれる. 従って $\iota: k \rightarrow \text{Im } \iota$ は $\eta = 0$ で開写像である.

(5) $\iota: k \rightarrow \widehat{k}$ が全射であることを示す. (3) と (4) より $\iota: k \rightarrow \text{Im } \iota$ は位相群としての同型を与えるから, $\text{Im } \iota$ は局所コンパクトである. これより $\text{Im } \iota$ は $\widehat{k}$ の閉部分群となることがわかる. 他方, (2) より $\text{Im } \iota$ は $\widehat{k}$ において稠密であるから, $\text{Im } \iota = \widehat{k}$ となる. $\square$

上の補題に基づいて k と $\widehat{k}$ を同一視するには k の自明でない指標を 1 つ構成する必要がある。そのために、写像 $\lambda: R \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を次のように定める:

(i) $R = \mathbb{R}$ の場合. $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\lambda(x) := -x \bmod 1$$

と置く (“-” がついていないことに注意).

(ii) $R = \mathbb{Q}_p$ の場合. $x \in \mathbb{Q}_p$ とするとき, 次の 2 つの条件をみたす $x' \in \mathbb{Q}$ が $\bmod 1$ で一意的に存在する:

$$x' \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right], \quad x' - x \in \mathbb{Z}_p.$$

実際, x を $x = \sum_{\nu} a_{\nu} p^{\nu}$ ($a_{\nu} \in \mathbb{Z}$) と p -進展開したときの “小数部分” $x' = \sum_{\nu < 0} a_{\nu} p^{\nu}$ はこれら 2 つの条件をみたす. また, $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \cap \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}$ より, そのような $x' \in \mathbb{Q}$ は $\bmod 1$ で一意的に定まることがわかる. そこで,

$$\lambda(x) := x' \bmod 1$$

と置く.

補題 2.2.2 上で定めた $\lambda: R \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は自明でない連続な (加法に関する) 準同型である.

[証明] (i) $R = \mathbb{R}$ の場合は明らか.

(ii) $R = \mathbb{Q}_p$ の場合. まず, $x' + y'$ が $x + y$ に対して上記 2 つの条件をみたすことより, λ が準同型であることがわかる. また, $\text{Ker } \lambda = \mathbb{Z}_p$ となることより連続性もわかる. $\square$

トレース $S: k \rightarrow R$ と $\lambda: R \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を用いて, 写像 $\Lambda: k \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を $\Lambda(\xi) := \lambda(S\xi)$ により定める. このとき $e^{2\pi i \Lambda(\xi)}$ は k の自明でない指標を与えるから, 補題 2.2.1 より次を得る:

定理 2.2.1 (局所体の自己双対性) 位相群としての同型写像

$$k \ni \eta \longmapsto e^{2\pi i \Lambda(\eta\xi)} \in \widehat{k}$$

により, $\widehat{k}$ は k と自然に同一視される.

補題 2.2.3 k を p -進体とするとき, 指標 $e^{2\pi i \Lambda(\eta\xi)}$ が $\mathfrak{o}$ 上自明であるためには $\eta \in \mathfrak{o}^{-1}$ となることが必要かつ十分である.

[証明] λ, Λ ならびに $\mathfrak{o}$ の定義より, $\eta \in k$ に対して

$$\Lambda(\eta\mathfrak{o}) = \{0\} \iff \lambda(S(\eta\mathfrak{o})) = \{0\} \iff S(\eta\mathfrak{o}) \subseteq \mathbb{Z}_p \iff \eta \in \mathfrak{o}^{-1}$$

が成り立つことによる. $\square$

次に, k の標準的な Haar 測度を 1 つ定めることを考える. そのために, とりあえず k の Haar 測度 μ を任意に固定する.

補題 2.2.4 $\alpha \in k, \alpha \neq 0$ とし, k の可測集合 M に対して $\mu_\alpha(M) := \mu(\alpha M)$ と定めると, μ_α は k の Haar 測度を与え, 従って $\mu_\alpha = \varphi(\alpha)\mu$ なる定数 $\varphi(\alpha) > 0$ が存在する.

[証明] 写像 $\xi \mapsto \alpha\xi$ が k からそれ自身への位相群としての同型を与えることによる. $\square$

補題 2.2.5 上の補題における定数 $\varphi(\alpha)$ は先に正規化した $\|\alpha\|$ に他ならない:

$$\mu(\alpha M) = \|\alpha\| \mu(M).$$

[証明] (i) $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ の場合は明らか.

(ii) k が $\mathfrak{p}$ -進体の場合. $\alpha \in \mathfrak{o}$ ならば $[\mathfrak{o} : \alpha\mathfrak{o}] = N\mathfrak{p}^{\text{ord } \alpha}$ で, $\alpha \notin \mathfrak{o}$ ならば $[\alpha\mathfrak{o} : \mathfrak{o}] = N\mathfrak{p}^{-\text{ord } \alpha}$ であるから, いずれの場合にも $\mu(\alpha\mathfrak{o}) = N\mathfrak{p}^{-\text{ord } \alpha}\mu(\mathfrak{o}) = \|\alpha\| \mu(\mathfrak{o})$ となり, これより主張を得る ($\mathfrak{o}$ はコンパクトな開集合であるから $0 < \mu(\mathfrak{o}) < \infty$). $\square$

上の補題より, 変数変換の公式

$$\int_{\alpha M} f(\xi) d\mu(\xi) = \|\alpha\| \int_M f(\alpha\xi) d\mu(\xi) \quad (i.e. d\mu(\alpha\xi) = \|\alpha\| d\mu(\xi))$$

を得る.

以下, k の標準的な Haar 測度として定理 2.2.1 の同型 $\widehat{k} \cong k$ に関して自己双対的なものを採用することにする. 簡単のため $d\mu(\xi)$ を $d\xi$ と書くことにすると,

$$d\xi := \begin{cases} \mathbb{R} \text{ の通常 Lebesgue 測度} & k = \mathbb{R} \text{ の場合} \\ \mathbb{C} \text{ の通常 Lebesgue 測度の 2 倍} & k = \mathbb{C} \text{ の場合} \\ \mathfrak{o} \text{ の測度を } N\mathfrak{d}^{-1/2} \text{ とするようなもの} & k \text{ が } \mathfrak{p}\text{-進体の場合} \end{cases}$$

が自己双対的な Haar 測度を与える:

定理 2.2.2 上のように正規化した測度を用いて $f(\xi) \in L_1(k)$ の Fourier 変換 $\widehat{f}(\eta)$ を

$$\widehat{f}(\eta) := \int_k f(\xi) e^{-2\pi i \Lambda(\eta\xi)} d\xi$$

により定めるとき, 反転公式

$$f(\xi) = \int_k \widehat{f}(\eta) e^{2\pi i \Lambda(\xi\eta)} d\eta = \widehat{\widehat{f}}(-\xi) \quad \forall f(\xi) \in \mathfrak{V}_1(k)$$

が成り立つ.

[証明] Fourier 解析の一般論により, 1 つの自明でない函数 $f(\xi)$ に対して反転公式を示せば十分である. $k = \mathbb{R}$ に対しては $f(\xi) := e^{-\pi\|\xi\|^2}$, $k = \mathbb{C}$ に対しては $f(\xi) := e^{-2\pi\|\xi\|}$, また k が $\mathfrak{p}$ -進体の場合には $f(\xi)$ として $\mathfrak{o}$ の特性函数をとることにより, このことが示される. 計算の詳細については §2.5 を参照のこと*8. □

2.3 乗法的な指標と測度

体 k の乗法群を k^* で表し, その一般の元を α と書くことにする. また, 連続な (乗法に関する) 準同型写像

$$k^* \ni \alpha \mapsto \|\alpha\| \in \mathbb{R}_{>0}$$

の核を u と置く:

$$u := \{ \alpha \in k^* ; \|\alpha\| = 1 \}.$$

u は k^* のコンパクトな部分群であるが, k が $\mathfrak{p}$ -進体のときには u は開部分群でもある.

一般に G を位相アーベル群とすると, G から $\mathbb{C}^*$ への連続な準同型写像を G の準指標と呼ぶ. G の準指標の全体は自然にアーベル群をなし, 指標群 $\widehat{G}$ (位相は無視したもの) はその部分群になる. いま G がコンパクトであるとする. このとき準指標 c による G の像 $c(G)$ は $\mathbb{C}^*$ のコンパクトな部分群であるから $\mathbb{T}$ に含まれ, 従って $c \in \widehat{G}$ となる. すなわち, G がコンパクトならば G の任意の準指標は指標になる.

まず, k^* の準指標の形を決定することを考える. 以下本節を通して単に“準指標”で k^* の準指標を意味するものとする. また, 準指標 c が u 上自明であるとき c は不分岐であるという.

補題 2.3.1 (i) $s \in \mathbb{C}$ とするとき, $\|\alpha\|^s := e^{s \log \|\alpha\|}$ は不分岐な準指標を与える.

(ii) $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ に対して

$$\|\alpha\|^{s_1} = \|\alpha\|^{s_2} \iff \begin{cases} s_1 = s_2 & k = \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ の場合} \\ s_1 \equiv s_2 \pmod{\frac{2\pi i}{\log N_{\mathfrak{p}}}} & k \text{ が } \mathfrak{p}\text{-進体の場合} \end{cases}.$$

(iii) 不分岐な準指標は $c(\alpha) = \|\alpha\|^s$ ($s \in \mathbb{C}$) の形のものに限る.

[証明] (i) 明らか.

(ii) 容易.

*8 原論文の “Section 2.6” はミスプリント.

(iii) 不分岐な準指標は乗法群

$$\{\|\alpha\| \in \mathbb{R}_{>0} ; \alpha \in k^*\} = \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} & k = \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ の場合} \\ \{N\mathfrak{p}^\nu ; \nu \in \mathbb{Z}\} & k \text{ が } \mathfrak{p}\text{-進体の場合} \end{cases}$$

の準指標と見なせる. これより k が $\mathfrak{p}$ -進体の場合の主張が直ちに従う.

いま $\psi(x)$ を $\mathbb{R}_{>0}$ の準指標とすると, $|\psi(x)|$ は $\mathbb{R}_{>0}$ からそれ自身への連続な準同型となり, 従って $|\psi(x)| = x^\sigma$ なる $\sigma \in \mathbb{R}$ が存在する. このとき $\psi(x)/|\psi(x)|$ は $\mathbb{R}_{>0}$ の指標を与えるから, 定理 2.2.1 より $\psi(x)/|\psi(x)| = x^{it}$ なる $t \in \mathbb{R}$ が存在することがわかる (以上の議論において, 乗法群 $\mathbb{R}_{>0}$ は加法群 $\mathbb{R}$ と同型であることを用いた). 故に $s := \sigma + it$ と置くと $\psi(x) = x^s$. これより $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ の場合の主張が得られる. $\square$

$\alpha \in k^*$ に対し, $\tilde{\alpha} \in u$ を

$$\tilde{\alpha} := \begin{cases} \frac{\alpha}{|\alpha|} & k = \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ の場合} \\ \frac{\alpha}{\pi^{\text{ord } \alpha}} & k \text{ が } \mathfrak{p}\text{-進体の場合} \end{cases}$$

により定める. このとき写像 $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ は k^* から u への連続な全射準同型で, その u への制限は恒等写像であるから, 写像

$$\hat{u} \ni \tilde{c} \mapsto (\alpha \mapsto \tilde{c}(\tilde{\alpha})) \in \hat{k}^*$$

は自然な全射準同型 $\hat{k}^* \rightarrow \hat{u}$ の右逆写像を与える. 上の写像による $\hat{u}$ の像は, $c|_u = \tilde{c}$ となるような $c \in \hat{k}^*$ の中で

$$\begin{aligned} c(r) &= 1 \quad \forall r \in \mathbb{R}_{>0} & k = \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ の場合} \\ c(\pi) &= 1 & k \text{ が } \mathfrak{p}\text{-進体の場合} \end{aligned}$$

なる性質により特徴づけられる.

定理 2.3.1 (i) $\tilde{c} \in \hat{u}$, $s \in \mathbb{C}$ とするとき, $\tilde{c}(\tilde{\alpha}) \|\alpha\|^s$ は k^* の準指標を与える.

(ii) $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \hat{u}$ と $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ に対して

$$\tilde{c}_1(\tilde{\alpha}) \|\alpha\|^{s_1} = \tilde{c}_2(\tilde{\alpha}) \|\alpha\|^{s_2} \iff \begin{cases} \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2, s_1 = s_2 & k = \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ の場合} \\ \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2, s_1 \equiv s_2 \left(\text{mod } \frac{2\pi i}{\log N\mathfrak{p}} \right) & k \text{ が } \mathfrak{p}\text{-進体の場合} \end{cases}.$$

(iii) k^* の準指標は $c(\alpha) = \tilde{c}(\tilde{\alpha}) \|\alpha\|^s$ ($\tilde{c} \in \hat{u}$, $s \in \mathbb{C}$) の形のものに限る.

[証明] (i) 明らか.

(ii) 容易.

(iii) c を k^* の準指標とし, その u への制限を $\tilde{c}$ とする. $\tilde{c}$ は u の準指標であるが, u はコンパクトであるから $\tilde{c} \in \hat{u}$ となる. このとき $c(\alpha)/\tilde{c}(\tilde{\alpha})$ は k^* の不分岐な準指標であるから, 上の補題により $c(\alpha)/\tilde{c}(\tilde{\alpha}) = \|\alpha\|^s$ なる $s \in \mathbb{C}$ が存在することがわかる. $\square$

以上により, k^* の準指標を決定するという問題は u の指標に関する問題に帰着できることがわかった. $k = \mathbb{R}$ のとき $u = \{1, -1\}$ で, u の指標は $\tilde{c}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}^n$ ($n \in \{0, 1\}$) に限る. $k = \mathbb{C}$ のとき $u = \mathbb{T}$ で, u の指標は $\tilde{c}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) に限る. また k が $\mathfrak{p}$ -進体のときには, u の部分群の族 $\{1 + \mathfrak{p}^\nu\}_{\nu > 0}$ は u における 1 の基本近傍系をなすから, 十分大きい ν に対しては $\tilde{c}(1 + \mathfrak{p}^\nu) = \{1\}$ となる ($\mathbb{T}$ における 1 の近傍で $\{1\}$ 以外に $\mathbb{T}$ の部分群を含まないものが存在することによる). そのような ν のうち最小のものを n とし, イデアル $\mathfrak{f} := \mathfrak{p}^n$ を $\tilde{c}$ の導手と呼ぶ. ただし $\tilde{c}(u) = \{1\}$ の場合には $\mathfrak{f} := \mathfrak{o}$ と定める. 準指標 c が分岐するとき, $\tilde{c}$ は有限群 $u/(1 + \mathfrak{f}) \cong (\mathfrak{o}/\mathfrak{f})^*$ の指標と見なせる.

準指標 c を $c(\alpha) = \tilde{c}(\tilde{\alpha}) \|\alpha\|^s$ と表すとき, $\tilde{c}$ が指標であることより $|c(\alpha)| = \|\alpha\|^\sigma$ となることがわかる. ここで $\sigma := \operatorname{Re} s$ で, これは c により一意的に定まる. この σ を c の指数と呼ぶ. 準指標はその指数が 0 のとき, かつそのときに限り指標になる.

次に, 加法群 k 上の Haar 測度を用いて k^* 上の Haar 測度を 1 つ定めることを考える.

$g(\alpha) \in L(k^*)$ とするとき, $g(\xi)/\|\xi\|$ は $L(k - \{0\})$ に属するから, $L(k^*)$ 上の線型汎函数

$$\Phi(g) := \int_{k - \{0\}} g(\xi) \frac{d\xi}{\|\xi\|}$$

を定義することができる. いま $\beta \in k^*$ を固定し, $g_\beta(\alpha) := g(\beta\alpha)$ と置くととき, 補題 2.2.5 により $\Phi(g_\beta) = \Phi(g)$ となることがわかる. 従って Φ は $L(k^*)$ 上の Haar 汎函数を与え, k^* の Haar 測度 $d_1^* \alpha$ で

$$\Phi(g) = \int_{k^*} g(\alpha) d_1^* \alpha \quad \forall g(\alpha) \in L(k^*)$$

なるものが存在する^{*9}. さて, $L(k^*)$ と $L(k - \{0\})$ はそれぞれ $L_1(k^*)$ と $L_1(k)$ の稠密な部分集合で, 写像

$$L(k^*) \ni g(\alpha) \mapsto \frac{g(\xi)}{\|\xi\|} \in L(k - \{0\})$$

は双方の L_1 -ノルムに関して一様連続な全単射である. よって $L_1(k^*)$ と $L_1(k)$ の完備性より次が得られる:

^{*9}原論文では乗法的測度を表すのに $d_1 \alpha$ や $d\alpha$ が用いられているが, 乗法的であることを強調するために $d_1^* \alpha$ や $d^* \alpha$ を用いた.

補題 2.3.2 k^* 上の函数 $g(\alpha)$ が $L_1(k^*)$ に属するためには $g(\xi)/\|\xi\| \in L_1(k)$ となることが必要かつ十分. また, このような $g(\alpha)$ に対し

$$\int_{k^*} g(\alpha) d_1^* \alpha = \int_k g(\xi) \frac{d\xi}{\|\xi\|}.$$

あとで, 乗法的な Haar 測度で部分群 u の測度を (例外的な場合を除いて) 1 にするものが必要になる. そのために, k^* の標準的な Haar 測度 $d^* \alpha$ を

$$d^* \alpha := \begin{cases} d_1^* \alpha = \frac{d\alpha}{\|\alpha\|} & k = \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ の場合} \\ \frac{N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p} - 1} d_1^* \alpha = \frac{N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p} - 1} \cdot \frac{d\alpha}{\|\alpha\|} & k \text{ が } \mathfrak{p}\text{-進体の場合} \end{cases}$$

と定めておく.

補題 2.3.3 k が $\mathfrak{p}$ -進体のとき,

$$\int_u d^* \alpha = N\mathfrak{d}^{-1/2}.$$

[証明] $d_1^* \alpha$ と $d\xi$ の定義より

$$\int_u d_1^* \alpha = \int_u \frac{d\xi}{\|\xi\|} = \int_u d\xi = \frac{N\mathfrak{p} - 1}{N\mathfrak{p}} \int_{\mathfrak{o}} d\xi = \frac{N\mathfrak{p} - 1}{N\mathfrak{p}} N\mathfrak{d}^{-1/2}$$

となることによる. □

2.4 局所的ゼータ函数と函数等式

$f(\xi)$ で k 上定義された複素数値函数を表し, その k^* への制限を $f(\alpha)$ と書く. また, $\mathfrak{z}$ で次の 2 つの条件をみたす函数 f の類を表す:

- ($\mathfrak{z}_1$) $f(\xi), \widehat{f}(\xi) \in L_1(k)$ かつ $f(\xi)$ は連続 (*i.e.* $f(\xi) \in \mathfrak{V}_1(k)$);
- ($\mathfrak{z}_2$) $f(\alpha) \|\alpha\|^\sigma, \widehat{f}(\alpha) \|\alpha\|^\sigma \in L_1(k^*) \quad \forall \sigma > 0.$

k のゼータ函数とは, 函数 $f \in \mathfrak{z}$ の乗法的な準 Fourier 変換をいう:

定義 2.4.1 各 $f \in \mathfrak{z}$ に対し, 指数が正の準指標 c の函数

$$\zeta(f, c) := \int_{k^*} f(\alpha) c(\alpha) d^* \alpha$$

を k のゼータ函数という.

2つの準指標が同値であるとは、それらの商が不分岐であることをいう。このとき補題 2.3.1 と定理 2.3.1 により、指標群 $\hat{u}$ と準指標の同値類全体のなす集合の間には

$$\tilde{c} \longleftrightarrow C = \{\tilde{c}(\tilde{\alpha}) \|\alpha\|^s; s \in \mathbb{C}\}$$

なる 1 対 1 対応がつくことがわかる。さて、複素変数 s によって各同値類 C を Riemann 面と見なすことができる。 $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のときには、 s は準指標に対して一意的に定まったから、 C は複素平面と同型になる。また k が $\mathfrak{p}$ -進体のときには、 s は $2\pi i / \log N\mathfrak{p}$ を法として一意的に定まったから、 C は複素平面を $2\pi i / \log N\mathfrak{p}$ の整数倍で割ったものと同型になる。準指標全体のなす集合を Riemann 面の集まりと見なすことにより、その部分集合上で定義された函数の正則性や特異点などの概念が自然に定義される。このような函数の解析接続を考える際には、各 Riemann 面 (準指標の同値類) ごとに別々に考えるものとする。

補題 2.4.1 ゼータ函数 $\zeta(f, c)$ は $\sigma > 0$ なる領域において正則である。ここで σ は c の指数を表す。

[証明] 準指標の同値類 C と $0 < \sigma_1 < \sigma_2$ なる σ_1, σ_2 を任意に固定し、

$$D(\sigma_1, \sigma_2) := \{c(\alpha) \in C; \sigma_1 < \sigma < \sigma_2\}$$

と置く。このとき $c \in D(\sigma_1, \sigma_2)$ に対して

$$|f(\alpha)c(\alpha)| = |f(\alpha)| \|\alpha\|^\sigma \leq g(\alpha)$$

が成り立つ。ただし

$$g(\alpha) := \begin{cases} |f(\alpha)| \|\alpha\|^{\sigma_1} & \|\alpha\| < 1 \text{ の場合} \\ |f(\alpha)| \|\alpha\|^{\sigma_2} & \|\alpha\| \geq 1 \text{ の場合} \end{cases}.$$

容易にわかるように $g(\alpha) \in L_1(k^*)$ となるから、 $\zeta(f, c)$ は $D(\sigma_1, \sigma_2)$ 上正則である。よって C ならびに σ_1, σ_2 が任意であることより主張を得る。 $\square$

以下で示すように、ゼータ函数 $\zeta(f, c)$ は函数等式をみたし、それによって準指標全体のなす領域に一価有理型に解析接続される。まず初めに次の補題を示す:

補題 2.4.2 $0 < \sigma < 1$ なる領域内の c に対し、

$$\zeta(f, c) \zeta(\hat{g}, \hat{c}) = \zeta(\hat{f}, \hat{c}) \zeta(g, c) \quad \forall f, g \in \mathfrak{z}.$$

ここで $\hat{c}(\alpha) := c^{-1}(\alpha) \|\alpha\|$ (これは指数が $1 - \sigma$ の準指標)。

[証明]

$$\zeta(f, c) \zeta(\widehat{g}, \widehat{c}) = \int_{k^*} f(\alpha) c(\alpha) d^* \alpha \int_{k^*} \widehat{g}(\beta) c(\beta^{-1}) \|\beta\| d^* \beta$$

であって、右辺の 2 つの積分は領域 $0 < \sigma < 1$ 内の c に対して絶対収束するから、これは

$$\iint_{k^* \times k^*} f(\alpha) \widehat{g}(\beta) c(\alpha\beta^{-1}) \|\beta\| d^* \alpha d^* \beta$$

(これも絶対収束する) に等しい. 直積測度 $d^* \alpha d^* \beta$ を不変にするような変数変換 $(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, \alpha\beta)$ により, 上の重積分は

$$\iint_{k^* \times k^*} f(\alpha) \widehat{g}(\alpha\beta) c(\beta^{-1}) \|\alpha\beta\| d^* \alpha d^* \beta$$

と書き直せ, さらに Fubini の定理を用いると逐次積分

$$\int_{k^*} \left(\int_{k^*} f(\alpha) \widehat{g}(\alpha\beta) \|\alpha\| d^* \alpha \right) c(\beta^{-1}) \|\beta\| d^* \beta$$

に一致することもわかる. 従って, 主張を示すためには内側の積分が f と g に関して対称であることをいえばよい.

さて, 加法的な測度による重積分

$$\iint_{k \times k} f(\xi) g(\eta) e^{-2\pi i \Lambda(\xi\beta\eta)} d\xi d\eta$$

は絶対収束し, 明らかに f と g に関して対称である. この積分を Fubini の定理を用いて

$$\int_k f(\xi) \left(\int_k g(\eta) e^{-2\pi i \Lambda(\xi\beta\eta)} d\eta \right) d\xi = \int_k f(\xi) \widehat{g}(\xi\beta) d\xi$$

と書き直し, さらに補題 2.3.2 によって右辺を

$$\int_{k^*} f(\alpha) \widehat{g}(\alpha\beta) \|\alpha\| d_1^* \alpha = \text{const.} \int_{k^*} f(\alpha) \widehat{g}(\alpha\beta) \|\alpha\| d^* \alpha$$

と書き直せば求める対称性を得る. □

次に, 局所的理論の基本定理を述べる.

定理 2.4.1 (局所的ゼータ函数の解析接続と函数等式) ゼータ函数 $\zeta(f, c)$ は準指標全体のなす領域に一価有理型に解析接続され,

$$\zeta(f, c) = \rho(c) \zeta(\widehat{f}, \widehat{c})$$

なる形の函数等式をみたす. ここで $\rho(c)$ は準指標全体のなす領域上で定義された f には依らない一価有理型函数である.

[証明] §2.5 で示すように, 準指標の各同値類 C に対して $\rho(c) := \zeta(f_C, c)/\zeta(\widehat{f_C}, \widehat{c})$ が C 内の帯状領域 $0 < \sigma < 1$ で定義される (*i.e.* 分母が恒等的に 0 ではない) ような函数 $f_C \in \mathfrak{z}$ が具体的に構成できる. このようにして得られた函数 $\rho(c)$ は Riemann 面 C の座標函数 s のよく知られた有理型函数で, C 全体に解析接続されることがわかる.

上の事実から定理は直ちに従う. 実際, 任意の $f \in \mathfrak{z}$ に対して先の補題により

$$\zeta(f, c) \zeta(\widehat{f_C}, \widehat{c}) = \zeta(\widehat{f}, \widehat{c}) \zeta(f_C, c) \quad (c \in C, 0 < \sigma < 1)$$

となるから,

$$\zeta(f, c) = \rho(c) \zeta(\widehat{f}, \widehat{c}) \quad (0 < \sigma < 1).$$

ここで, 左辺は $\sigma > 0$ で定義された正則函数, 右辺は $\sigma < 1$ で定義された有理型函数であるから, この函数等式により $\zeta(f, c)$ は準指標全体のなす領域に一価有理型に解析接続される. $\square$

函数 $\rho(c)$ の計算に入る前に, その簡単な性質を示しておく. これらは函数等式から直ちに導かれる.

補題 2.4.3 (i) $\rho(\widehat{c}) = c(-1)/\rho(c)$.

(ii) $\rho(\overline{c}) = c(-1) \overline{\rho(c)}$.

[証明] (i) まず函数等式より

$$\zeta(f, c) = \rho(c) \zeta(\widehat{f}, \widehat{c}) = \rho(c) \rho(\widehat{c}) \zeta(\widehat{\widehat{f}}, \widehat{\widehat{c}}).$$

他方, $\widehat{\widehat{f}}(\alpha) = f(-\alpha)$ と $\widehat{\widehat{c}}(\alpha) = c(\alpha)$ より

$$\zeta(f, c) = \int_{k^*} f(\alpha) c(\alpha) d^* \alpha = c(-1) \int_{k^*} \widehat{\widehat{f}}(\alpha) \widehat{\widehat{c}}(\alpha) d^* \alpha = c(-1) \zeta(\widehat{\widehat{f}}, \widehat{\widehat{c}})$$

がわかる^{*10}. 従って $\rho(c) \rho(\widehat{c}) = c(-1)$ となる.

(ii) 函数等式より

$$\overline{\zeta(f, c)} = \zeta(\overline{f}, \overline{c}) = \rho(\overline{c}) \zeta(\widehat{\overline{f}}, \widehat{\overline{c}}).$$

ここで $\widehat{\overline{f}}(\alpha) = \overline{\widehat{f}}(-\alpha)$ と $\widehat{\overline{c}}(\alpha) = \overline{c}(\alpha)$ より, (i) と同様にして

$$\zeta(\widehat{\overline{f}}, \widehat{\overline{c}}) = c(-1) \zeta(\overline{\widehat{f}}, \overline{\widehat{c}}) = c(-1) \overline{\zeta(\widehat{f}, \widehat{c})}$$

となることがわかる. 他方, 再び函数等式より

$$\overline{\zeta(f, c)} = \overline{\rho(c)} \overline{\zeta(\widehat{f}, \widehat{c})}.$$

従って $c(-1) \rho(\overline{c}) = \overline{\rho(c)}$ となり, $c(-1) = \pm 1$ より主張を得る. $\square$

^{*10} 原論文の “ $\dots = c(-1) \zeta(f, c)$ ” はミスプリント.

系 2.4.1 $\sigma = 1/2$ であるような c に対しては $|\rho(c)| = 1$.

[証明] $\sigma = 1/2$ ならば $c(\alpha) \bar{c}(\alpha) = |c(\alpha)|^2 = \|\alpha\| = c(\alpha) \widehat{c}(\alpha)$ となるから, $\bar{c}(\alpha) = \widehat{c}(\alpha)$. よって上の補題より

$$\frac{c(-1)}{\rho(c)} = \rho(\widehat{c}) = \rho(\bar{c}) = c(-1) \overline{\rho(c)}$$

となり, $\rho(c) \overline{\rho(c)} = 1$ を得る. □

2.5 特別なゼータ函数に対する $\rho(c)$ の計算

本説では定理 2.4.1 (と定理 2.2.2) の証明で残していた計算を行う. すなわち, 準指標の各同値類 C に対して函数 $f_C \in \mathfrak{z}$ でその Fourier 変換 $\widehat{f_C}$ やゼータ函数 $\zeta(f_C, c)$ ($c \in C$) が容易に計算できるようなものを具体的に構成する. この計算により, $\rho(c)$ の各 Riemann 面 C の座標函数 s による解析的な表示が得られる. k が実数体の場合, 複素数体の場合, ならびに $\mathfrak{p}$ -進体の場合に分けて考えて行く.

k が実数体の場合

ξ は実変数

α は 0 でない実変数

$\Lambda(\xi) = -\xi \bmod 1$

$\|\alpha\| = |\alpha|$ は通常の絶対値

$d\xi$ は通常の Lebesgue 測度

$$d^*\alpha = \frac{d\alpha}{|\alpha|}$$

準指標の同値類 C $c_n(\alpha) := (\text{sgn } \alpha)^n$ ($n \in \{0, 1\}$) によつて定義される $c_n \in \widehat{\mathbb{R}^*}$ は準指標の同値類の完全代表系を与える. c_n を代表元とする同値類を C_n で表す.

函数 $f_C \in \mathfrak{z}$

$$f_n(\xi) = f_{C_n}(\xi) := \xi^n e^{-\pi \xi^2}.$$

Fourier 変換 $\widehat{f_C}$

$$\widehat{f_n}(\eta) = i^n f_n(\eta).$$

[証明] $\widehat{f_0}(\eta) = f_0(\eta)$ となることは

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \xi^2 + 2\pi i \eta \xi} d\xi = e^{-\pi \eta^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(\xi - i\eta)^2} d\xi = e^{-\pi \eta^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \xi^2} d\xi = e^{-\pi \eta^2}$$

と示され, この両辺に $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{d}{d\eta}$ を作用させることにより, $\widehat{f_1}(\eta) = i f_1(\eta)$ となることがわかる. なお,

$$\widehat{\widehat{f_0}}(\xi) = \widehat{f_0}(\xi) = f_0(\xi) = f_0(-\xi)$$

となるから $d\xi$ は自己双対的である. □

ゼータ函数 $\zeta(f_C, c)$, $\zeta(\widehat{f_C}, \widehat{c})$

$$\zeta(f_n, c_n \|\cdot\|^s) = \pi^{-(s+n)/2} \Gamma\left(\frac{s+n}{2}\right),$$

$$\zeta(\widehat{f_n}, \widehat{c_n \|\cdot\|^s}) = i^n \pi^{-(1-s+n)/2} \Gamma\left(\frac{1-s+n}{2}\right).$$

[証明] $f_n(\alpha) c_n(\alpha) \|\alpha\|^s = \alpha^n e^{-\pi\alpha^2} (\operatorname{sgn} \alpha)^n |\alpha|^s = |\alpha|^{s+n} e^{-\pi\alpha^2}$ となることより,

$$\zeta(f_n, c_n \|\cdot\|^s) = 2 \int_0^\infty \alpha^{s+n} e^{-\pi\alpha^2} \frac{d\alpha}{\alpha} = \pi^{-(s+n)/2} \Gamma\left(\frac{s+n}{2}\right).$$

また,

$$\zeta(\widehat{f_n}, \widehat{c_n \|\cdot\|^s}) = \zeta(i^n f_n, c_n \|\cdot\|^{1-s}) = i^n \pi^{-(1-s+n)/2} \Gamma\left(\frac{1-s+n}{2}\right).$$

□

函数 $\rho(c)$

$$\rho(c_n \|\cdot\|^s) = \frac{\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s+n}{2}\right)}{i^n \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s+n}{2}\right)} = \begin{cases} 2^{1-s} \pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) & n=0 \text{ の場合} \\ -i 2^{1-s} \pi^{-s} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) & n=1 \text{ の場合}^{*11} \end{cases}.$$

[証明]

$$\rho(c_n \|\cdot\|^s) = \frac{\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s+n}{2}\right)}{i^n \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s+n}{2}\right)}$$

に対して公式

$$\Gamma(s+1) = s \Gamma(s), \quad \Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}, \quad \pi^{1/2} \Gamma(2s) = 2^{2s-1} \Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)$$

を何回か適用すればよい.

□

k が複素数体の場合

$\xi = x + iy$ は複素変数

$\Lambda(\xi) = -2x \bmod 1$

$d\xi = 2|dx dy|$ は通常の Lebesgue 測度の 2 倍

$\alpha = re^{i\theta}$ は 0 でない複素変数

$\|\alpha\| = r^2$ は通常の絶対値の 2 乗

$$d^* \alpha = \frac{2|dr d\theta|}{r^2}$$

準指標の同値類 C $c_n(re^{i\theta}) := e^{in\theta}$ ($n \in \mathbb{Z}$) によって定義される $c_n \in \widehat{\mathbb{T}^*}$ は準指標の同値類の完全代表系を与える. c_n を代表元とする同値類を C_n で表す.

^{*11} 原論文の “ $\rho(\pm|\cdot|^s) = i \dots$ ” はミスプリント.

函数 $f_C \in \mathfrak{z}$

$$f_n(\xi) = f_{C_n}(\xi) := \begin{cases} (x - iy)^n e^{-2\pi(x^2+y^2)} & n \geq 0 \text{ の場合} \\ (x + iy)^{-n} e^{-2\pi(x^2+y^2)} & n < 0 \text{ の場合} \end{cases}.$$

Fourier 変換 $\widehat{f_C}$

$$\widehat{f_n}(\eta) = i^{|n|} f_{-n}(\eta).$$

[証明] まず $n \geq 0$ に対して主張を示す. $n = 0$ に対しては, $\eta = u + iv$ として

$$\widehat{f_0}(\eta) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi(x^2+y^2)+4\pi i(ux-vy)} dx dy = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi x^2+4\pi i u x} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi y^2-4\pi i v y} dy$$

となるから, 実数体の場合における計算と同様にして $\widehat{f_0}(\eta) = f_0(\eta)$ となることがわかる. いま, 主張が $n \geq 0$ まで正しいとする:

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - iy)^n e^{-2\pi(x^2+y^2)+4\pi i(ux-vy)} dx dy = i^n (u + iv)^n e^{-2\pi(u^2+v^2)}.$$

この両辺に $\frac{1}{4\pi i} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}$ を作用させると,

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - iy)^{n+1} e^{-2\pi(x^2+y^2)+4\pi i(ux-vy)} dx dy = i^{n+1} (u + iv)^{n+1} e^{-2\pi(u^2+v^2)}$$

と $n + 1$ に対する主張を得る^{*12}.

$n < 0$ に対しては, 既に表示した $\widehat{f_{-n}}(\eta) = i^{|n|} f_n(\eta)$ より

$$\widehat{f_n}(\eta) = i^{-|n|} \widehat{\widehat{f_{-n}}}(\eta) = i^n f_{-n}(-\eta) = i^n (-1)^n f_{-n}(\eta) = i^{|n|} f_{-n}(\eta).$$

なお,

$$\widehat{\widehat{f_0}}(\xi) = \widehat{f_0}(\xi) = f_0(\xi) = f_0(-\xi)$$

となるから $d\xi$ は自己双対的である. □

ゼータ函数 $\zeta(f_C, c), \zeta(\widehat{f_C}, \widehat{c})$ ^{*13}

$$\begin{aligned} \zeta(f_n, c_n \|\cdot\|^s) &= (2\pi)^{1-s-|n|/2} \Gamma\left(s + \frac{|n|}{2}\right), \\ \zeta(\widehat{f_n}, \widehat{c_n} \|\cdot\|^s) &= i^{|n|} (2\pi)^{s-|n|/2} \Gamma\left(1 - s + \frac{|n|}{2}\right). \end{aligned}$$

^{*12}原論文の “ $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u + iv)^{n+1} \dots$ ” はミスプリント.

^{*13}原論文の “ $\zeta(f_n, c_n \|\cdot\|^s) = \dots = (2\pi)^{1-s+|n|/2} \dots$ ” と “ $\zeta(\widehat{f_n}, \widehat{c_n} \|\cdot\|^s) = \dots = i^{|n|} (2\pi)^{s+|n|/2} \dots$ ” はミスプリント.

[証明] $\alpha = re^{i\theta}$ とすると $f_n(\alpha) c_n(\alpha) \|\alpha\|^s = r^{|n|} e^{-in\theta} e^{-2\pi r^2} e^{in\theta} r^{2s} = r^{2s+|n|} e^{-2\pi r^2}$ となるから,

$$\begin{aligned} \zeta(f_n, c_n \|\cdot\|^s) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\infty r^{2s+|n|} e^{-2\pi r^2} \frac{2dr}{r} \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\infty (r^2)^{s+|n|/2} e^{-2\pi r^2} \frac{d(r^2)}{r^2} \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\infty r^{s+|n|/2} e^{-2\pi r} \frac{dr}{r} = (2\pi)^{1-s-|n|/2} \Gamma\left(s + \frac{|n|}{2}\right). \end{aligned}$$

また,

$$\zeta(\widehat{f_n}, \widehat{c_n \|\cdot\|^s}) = \zeta(i^{|n|} f_{-n}, c_{-n} \|\cdot\|^{1-s}) = i^{|n|} (2\pi)^{s-|n|/2} \Gamma\left(1-s + \frac{|n|}{2}\right).$$

□

函数 $\rho(c)$

$$\begin{aligned} \rho(c_n \|\cdot\|^s) &= \frac{(2\pi)^{-s} \Gamma\left(s + \frac{|n|}{2}\right)}{i^{|n|} (2\pi)^{-(1-s)} \Gamma\left(1-s + \frac{|n|}{2}\right)} \\ &= \begin{cases} (2\pi)^{1-2s} \sin(\pi s) \Gamma\left(s - \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{n}{2}\right) & n \text{ が偶数の場合} \\ i (2\pi)^{1-2s} \cos(\pi s) \Gamma\left(s - \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{n}{2}\right) & n \text{ が奇数の場合} \end{cases}. \end{aligned}$$

[証明] 実数体の場合における計算と同様.

□

k が $\mathfrak{p}$ -進体の場合

ξ は $\mathfrak{p}$ -進変数

$\alpha = \tilde{\alpha}\pi^\nu$ は 0 でない $\mathfrak{p}$ -進変数

$\Lambda(\xi) = \lambda(S\xi)$

$\|\alpha\| = N\mathfrak{p}^\nu$

$d\xi$ による $\mathfrak{o}$ の測度は $N\mathfrak{d}^{-1/2}$

$d^*\alpha = \frac{N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}-1} \cdot \frac{d\alpha}{\|\alpha\|}$ による u の測度は $N\mathfrak{d}^{-1/2}$

準指標の同値類 C $c(\pi) = 1$ となるような $c \in \widehat{k}^*$ の全体は準指標の同値類の完全代表系を与える. そのような $c \in \widehat{k}^*$ の u への制限 $\tilde{c} \in \widehat{u}$ の導手を $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^n$ とし, 以下 c を c_n と書く (c が不分岐 (*i.e.* $n = 0$) の場合には $c_0 = 1$ であるが, c が分岐する場合には c_n が n から一意的に定まっている訳ではないことに注意). また, c_n を代表元とする同値類を C_n で表す.

函数 $f_C \in \mathfrak{z}$

$$f_n(\xi) = f_{C_n}(\xi) := \begin{cases} e^{2\pi i \Lambda(\xi)} & \xi \in \mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{p}^{-n} \text{ の場合} \\ 0 & \xi \notin \mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{p}^{-n} \text{ の場合} \end{cases}.$$

Fourier 変換 $\widehat{f_C}$

$$\widehat{f_n}(\eta) = \begin{cases} N\mathfrak{d}^{1/2}N\mathfrak{p}^n & \eta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^n} \text{ の場合} \\ 0 & \eta \not\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^n} \text{ の場合} \end{cases}.$$

[証明]

$$\widehat{f_n}(\eta) = \int_{\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{p}^{-n}} e^{-2\pi i \Lambda((\eta-1)\xi)} d\xi$$

は加法群 k のコンパクトな部分群 $\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{p}^{-n}$ 上で加法的な指標 $e^{-2\pi i \Lambda((\eta-1)\xi)}$ を積分したものに他ならない. $\eta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^n}$ ならば, この指標は $\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{p}^{-n}$ 上自明になるから積分はその測度 $N\mathfrak{d}^{1/2}N\mathfrak{p}^n$ になる. また $\eta \not\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^n}$ ならば, この指標は $\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{p}^{-n}$ 上自明ではないから積分は 0 になる. $\square$

ゼータ函数 $\zeta(f_C, c)$, $\zeta(\widehat{f_C}, \widehat{c})$ (i) 分岐しない場合.

$$\zeta(f_0, \|\cdot\|^s) = \frac{N\mathfrak{d}^{s-1/2}}{1 - N\mathfrak{p}^{-s}},$$

$$\zeta(\widehat{f_0}, \widehat{\|\cdot\|^s}) = \frac{1}{1 - N\mathfrak{p}^{s-1}}.$$

(ii) 分岐する場合.

$$\zeta(f_n, c_n \|\cdot\|^s) = N(\mathfrak{d}\mathfrak{f})^s \sum_{\varepsilon \in u/(1+\mathfrak{f})} c_n(\varepsilon) \exp\left(2\pi i \Lambda\left(\varepsilon \pi^{-\text{ord}(\mathfrak{d}\mathfrak{f})}\right)\right) \int_{1+\mathfrak{f}} d^* \alpha,$$

$$\zeta(\widehat{f_n}, \widehat{c_n \|\cdot\|^s}) = N\mathfrak{d}^{1/2}N\mathfrak{f} \int_{1+\mathfrak{f}} d^* \alpha.$$

(函数 $\rho(c)$ を求めるためには上の積分の値を計算する必要はない.)

[証明] (1) $\mathfrak{d} = \mathfrak{p}^d$ とし, 各 $\nu \in \mathbb{Z}$ に対して $A_\nu := \pi^\nu u = \{\alpha \in k^* ; \text{ord } \alpha = \nu\}$ と置く. このとき $\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{p}^{-n} = \mathfrak{p}^{-d-n} = \coprod_{\nu=-d-n}^{\infty} A_\nu$ となることより,

$$\zeta(f_n, c_n \|\cdot\|^s) = \int_{\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{p}^{-n}} e^{2\pi i \Lambda(\alpha)} c_n(\alpha) \|\alpha\|^s d^* \alpha = \sum_{\nu=-d-n}^{\infty} N\mathfrak{p}^{-\nu s} \int_{A_\nu} e^{2\pi i \Lambda(\alpha)} c_n(\alpha) d^* \alpha.$$

ここで

$$\nu \geq -d \implies A_\nu \subseteq \mathfrak{d}^{-1} \implies e^{2\pi i \Lambda(\alpha)} = 1 \quad \forall \alpha \in A_\nu$$

となるから,

$$\nu \geq -d \implies \int_{A_\nu} e^{2\pi i \Lambda(\alpha)} c_n(\alpha) d^* \alpha = \int_{A_\nu} c_n(\alpha) d^* \alpha.$$

また,

$$\int_{A_\nu} c_n(\alpha) d^* \alpha = \int_u c_n(\pi^\nu \alpha) d^* \alpha = \int_u c_n(\alpha) d^* \alpha = \begin{cases} N\mathfrak{d}^{-1/2} & n = 0 \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}.$$

(2) (1) より

$$\zeta(f_0, \|\cdot\|^s) = \sum_{\nu=-d}^{\infty} N\mathfrak{p}^{-\nu s} N\mathfrak{d}^{-1/2} = \frac{N\mathfrak{p}^{ds}}{1 - N\mathfrak{p}^{-s}} N\mathfrak{d}^{-1/2} = \frac{N\mathfrak{d}^{s-1/2}}{1 - N\mathfrak{p}^{-s}}.$$

また $\widehat{f_0}$ は $\mathfrak{o}$ の特性関数に $N\mathfrak{d}^{1/2}$ を掛けたものであるから, 同様にして

$$\zeta(\widehat{f_0}, \widehat{\|\cdot\|^s}) = \zeta(\widehat{f_0}, \|\cdot\|^{1-s}) = N\mathfrak{d}^{1/2} \int_{\mathfrak{o}} \|\alpha\|^{1-s} d^* \alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} N\mathfrak{p}^{-\nu(1-s)} = \frac{1}{1 - N\mathfrak{p}^{s-1}}.$$

(3) $n > 0$ とする. このとき (1) より,

$$\zeta(f_n, c_n \|\cdot\|^s) = \sum_{\nu=d-n}^{-d-1} N\mathfrak{p}^{-\nu s} \int_{A_\nu} e^{2\pi i \Lambda(\alpha)} c_n(\alpha) d^* \alpha.$$

いま $-d-n \leq \nu \leq -d-1$ とし, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ を $u/(1 + \mathfrak{p}^{-d-\nu})$ の完全代表系とすると

$$A_\nu = \prod_{j=1}^r \varepsilon_j \pi^\nu (1 + \mathfrak{p}^{-d-\nu}) = \prod_{j=1}^r (\varepsilon_j \pi^\nu + \mathfrak{d}^{-1})$$

となるから,

$$\int_{A_\nu} e^{2\pi i \Lambda(\alpha)} c_n(\alpha) d^* \alpha = \sum_{j=1}^r \int_{\varepsilon_j \pi^\nu + \mathfrak{d}^{-1}} e^{2\pi i \Lambda(\alpha)} c_n(\alpha) d^* \alpha.$$

ここで, 集合 $\varepsilon_j \pi^\nu + \mathfrak{d}^{-1}$ 上では $\Lambda(\alpha) = \Lambda(\varepsilon_j \pi^\nu)$ であるから, 右辺に現れた積分は

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon_j \pi^\nu + \mathfrak{d}^{-1}} e^{2\pi i \Lambda(\alpha)} c_n(\alpha) d^* \alpha &= e^{2\pi i \Lambda(\varepsilon_j \pi^\nu)} \int_{\varepsilon_j \pi^\nu (1 + \mathfrak{p}^{-d-\nu})} c_n(\alpha) d^* \alpha \\ &= e^{2\pi i \Lambda(\varepsilon_j \pi^\nu)} c_n(\varepsilon_j) \int_{1 + \mathfrak{p}^{-d-\nu}} c_n(\alpha) d^* \alpha \end{aligned}$$

となるが, $\tilde{c}$ の導手が $\mathfrak{p}^n$ であることより

$$\int_{1 + \mathfrak{p}^{-d-\nu}} c_n(\alpha) d^* \alpha = \begin{cases} \int_{1 + \mathfrak{p}^n} d^* \alpha & \nu = -d - n \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

となるから,

$$\int_{A_\nu} e^{2\pi i \Lambda(\alpha)} c_n(\alpha) d^* \alpha = \begin{cases} \sum_{j=1}^r c_n(\varepsilon_j) e^{2\pi i \Lambda(\varepsilon_j \pi^{-(d+n)})} \int_{1 + \mathfrak{p}^n} d^* \alpha & \nu = -d - n \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}.$$

故に

$$\zeta(f_n, c_n \|\cdot\|^s) = N\mathfrak{p}^{(d+n)s} \sum_{\varepsilon \in u/(1+\mathfrak{p}^n)} c_n(\varepsilon) e^{2\pi i \Lambda(\varepsilon \pi^{-(d+n)})} \int_{1+\mathfrak{p}^n} d^* \alpha.$$

また, $\widehat{f_n}$ は $1 + \mathfrak{p}^n$ の特性函数に $N\mathfrak{d}^{1/2} N\mathfrak{p}^n$ を掛けたもので, $\widehat{c_n \|\cdot\|^s} = c_n^{-1} \|\cdot\|^{1-s}$ は $1 + \mathfrak{p}^n$ 上自明であるから,

$$\zeta(\widehat{f_n}, \widehat{c_n \|\cdot\|^s}) = N\mathfrak{d}^{1/2} N\mathfrak{p}^n \int_{1+\mathfrak{p}^n} d^* \alpha.$$

□

函数 $\rho(c)$ (i) 分岐しない場合.

$$\rho(\|\cdot\|^s) = N\mathfrak{d}^{s-1/2} \frac{1 - N\mathfrak{p}^{s-1}}{1 - N\mathfrak{p}^{-s}}.$$

(ii) 分岐する場合.

$$\rho(c_n \|\cdot\|^s) = N(\mathfrak{d}\mathfrak{f})^{s-1/2} \rho_0(c_n).$$

ここで

$$\rho_0(c_n) := N\mathfrak{f}^{-1/2} \sum_{\varepsilon \in u/(1+\mathfrak{f})} c_n(\varepsilon) \exp\left(2\pi i \Lambda\left(\varepsilon \pi^{-\text{ord}(\mathfrak{d}\mathfrak{f})}\right)\right)$$

は絶対値が 1 であるような定数 (これを **root number** という).

[証明] c_n は指標であるから $c_n \|\cdot\|^{1/2}$ の指数は $1/2$ となる. 従って系 2.4.1 より $|\rho_0(c_n)| = |\rho(c_n \|\cdot\|^{1/2})| = 1$. 残りの主張は明らか. □

なお, c が分岐しない場合において $f_0^*(\xi)$ を $\mathfrak{o}$ の特性函数とした場合には, $\widehat{f_0^*}(\eta)$ は $\mathfrak{d}^{-1}$ の特性函数に $N\mathfrak{d}^{-1/2}$ を掛けたものになることが同様の計算でわかる. 従って

$$f_0^*(\xi) = N\mathfrak{d}^{-1/2} \widehat{f_0}(\xi), \quad \widehat{f_0^*}(\eta) = N\mathfrak{d}^{-1/2} f_0(\eta)$$

となり,

$$\widehat{\widehat{f_0^*}}(\xi) = N\mathfrak{d}^{-1/2} \widehat{f_0}(\xi) = f_0^*(\xi) = f_0^*(-\xi).$$

よって $d\xi$ は自己双対的である. また,

$$\zeta(f_0^*, \|\cdot\|^s) = N\mathfrak{d}^{-1/2} \zeta(\widehat{f_0}, \|\cdot\|^s) = \frac{N\mathfrak{d}^{-1/2}}{1 - N\mathfrak{p}^{-s}},$$

$$\zeta(\widehat{f_0^*}, \widehat{\|\cdot\|^s}) = N\mathfrak{d}^{-1/2} \zeta(f_0, \|\cdot\|^{1-s}) = \frac{N\mathfrak{d}^{-s}}{1 - N\mathfrak{p}^{s-1}}.$$

3 制限直積

本節を通して“殆ど全て”という言葉は“有限個の例外を除いて”の意味で用い、それを記号 $\forall'$ で表す.

3.1 序

M を添字集合 (その一般の元を $\mathfrak{p}$ と書くことにする) とし, 次のデータが与えられているとする:

全ての $\mathfrak{p} \in M$ に対し, 局所コンパクトアーベル群 $G_{\mathfrak{p}}$;
 殆ど全ての $\mathfrak{p} \in M$ に対し, $G_{\mathfrak{p}}$ のコンパクトな開部分群 $H_{\mathfrak{p}}$.

このとき, 抽象群 $\prod_{\mathfrak{p} \in M} G_{\mathfrak{p}}$ の部分群 G を

$$G := \left\{ \mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \prod_{\mathfrak{p}} G_{\mathfrak{p}} ; \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \in H_{\mathfrak{p}} \quad \forall' \mathfrak{p} \right\}$$

により定めることができる.

以下, M の有限部分集合で, $H_{\mathfrak{p}}$ が定義されていないような $\mathfrak{p}$ を全て含んでいるようなものを一般に S と書くことにする. 各 S に対し, G の部分群 G_S を

$$G_S := \prod_{\mathfrak{p} \in S} G_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} H_{\mathfrak{p}} = \left\{ \mathfrak{a} \in \prod_{\mathfrak{p}} G_{\mathfrak{p}} ; \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \in H_{\mathfrak{p}} \quad \forall \mathfrak{p} \notin S \right\}$$

により定める. このとき, $\prod_{\mathfrak{p}} G_{\mathfrak{p}}$ の直積位相を制限して得られる G_S の位相は局所コンパクト群 $G_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p} \in S$) とコンパクト群 $H_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p} \notin S$) とから定まる直積位相に一致し, この位相に関して G_S は局所コンパクト群になる.

さて, 上のような S の全体は (無限個または有限個の) 共通部分をとる操作や有限個の和集合をとる操作に関して閉じていて, 容易にわかるように

$$\bigcap_j G_{S_j} = G_{\bigcap_j S_j}, \quad G_{S_1} \cup G_{S_2} \subseteq G_{S_1 \cup S_2}$$

が成り立つ. また, $S_1 \subseteq S_2$ ならば G_{S_1} は G_{S_2} の開部分集合である. さらに G の定義より $G = \bigcup_S G_S$ となっている. これらの G_S を用いて, G の位相を次のように定める^{*14}: G の部分集合 U に対し,

U は G の開集合 $:\iff$ 任意の S に対して $U \cap G_S$ は G_S の開集合.

このとき G の位相を G_S に制限したものは G_S の元々の位相と一致し, G_S は G の開部分集合になる. 従って, 各 G_S が局所コンパクト群であることより, $G = \bigcup_S G_S$ もこの位相によって局所コンパクト群になることがわかる.

^{*14} この定義は原論文とは異なるが, 定まる位相は同一のものである.

定義 3.1.1 局所コンパクト (アーベル) 群 G を $\{G_p\}_p$ の $\{H_p\}_p$ に関する制限直積と呼ぶ.

補題 3.1.1 $N = \prod_p N_p$ の形の “平行体” の全体は G における 1 の基本近傍系をなす. ただし各 N_p は G_p における 1 の近傍で, 殆ど全ての p に対して $N_p = H_p$ となっているようなものである.

[証明] $N_p = H_p \quad \forall p \notin S$ となるような S をとると, $N = \prod_{p \in S} N_p \times \prod_{p \notin S} H_p$ となり, これは G_S における 1 の近傍, 従って G における 1 の近傍である. 逆に U を G における 1 の近傍とすると, $U \cap G_S$ は G_S における 1 の近傍であるから, $\prod_p N_p \subseteq U \cap G_S (\subseteq U)$ となるような G_S における 1 の近傍 $\prod_p N_p$ ($N_p = H_p \quad \forall p$) が存在する. $\square$

上の補題により, G の位相は $\prod_p G_p$ の直積位相を制限して得られるものよりも強い (従って, 各 p に対して射影 $\varpi_p : G \rightarrow G_p$ は連続になる) ことがわかる.

各 p に対し, 写像 $\iota_p : G_p \rightarrow G$ を

$$(\iota_p(a_p) \text{ の } p'\text{-成分}) := \begin{cases} a_p & p' = p \text{ の場合} \\ 1 & p' \neq p \text{ の場合} \end{cases}$$

により定めると, ι_p は G_p から $\text{Im } \iota_p$ への (位相群としての) 同型写像を与える. ただし $\text{Im } \iota_p$ の位相は G の位相を制限して得られるものである. 従って G_p は G の閉部分群

$$\text{Im } \iota_p = G_p \times \prod_{p' \neq p} \{1\} = \{a \in G ; a_{p'} = 1 \quad \forall p' \neq p\}$$

と自然に同一視することができる.

各 S に対し, G_S のコンパクトな部分群 G^S を

$$G^S := \prod_{p \in S} \{1\} \times \prod_{p \notin S} H_p = \left\{ a \in \prod_p G_p ; a_p = 1 \quad \forall p \in S, a_p \in H_p \quad \forall p \notin S \right\}$$

により定める. このとき G_S は

$$G_S = \prod_{p \in S} G_p \times G^S$$

と, 有限個の局所コンパクト群 G_p ($p \in S$) とコンパクト群 G^S との直積に分解される.

補題 3.1.2 G の部分集合 C が相対コンパクトであるためには C が $B = \prod_p B_p$ の形の平行体に含まれることが必要かつ十分である. ただし各 B_p は G_p のコンパクトな部分集合で, 殆ど全ての p に対して $B_p = H_p$ となっているようなものである.

[証明] $B_p = H_p \quad \forall p \notin S$ となるような S をとると, $B = \prod_{p \in S} B_p \times \prod_{p \notin S} H_p$ となり, これは G_S のコンパクトな部分集合, 従って G のコンパクトな部分集合である. 逆に, $\{G_S\}_S$ は G の開被

覆を与えるから, G の任意のコンパクトな部分集合はある G_S に含まれる (先に注意したように $G_{S_1} \cup \cdots \cup G_{S_r} \subseteq G_{S_1 \cup \cdots \cup S_r}$). また, G_S の任意のコンパクトな部分集合は上の形の平行体に含まれる. 実際, C を G_S のコンパクトな部分集合とすると, 各 $\mathfrak{p} \in S$ に対して $B_{\mathfrak{p}} := \varpi_{\mathfrak{p}}(C)$ は $G_{\mathfrak{p}}$ のコンパクトな部分集合で,

$$C \subseteq \prod_{\mathfrak{p} \in S} B_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} H_{\mathfrak{p}}$$

が成り立つ. □

最後にアーベル群を可換環で置き換えた場合にも上と同様のことが成り立つことを注意しておく. いま, 次のデータが与えられているとする:

全ての $\mathfrak{p} \in M$ に対し, 局所コンパクト可換環 $R_{\mathfrak{p}}$;

殆ど全ての $\mathfrak{p} \in M$ に対し, $R_{\mathfrak{p}}$ のコンパクトな開部分環 $R'_{\mathfrak{p}}$.

このとき, $\{R_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p}}$ の $\{R'_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p}}$ に関する制限直積 R を上と同様に定めると, R は抽象環 $\prod_{\mathfrak{p}} R_{\mathfrak{p}}$ の部分環で, 加法に関して局所コンパクト群になり, 乗法が連続であることも容易に示せる. よって R は位相環になる. このようにして得られた局所コンパクト環 R を $\{R_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p}}$ の $\{R'_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p}}$ に関する制限直積と呼ぶ.

3.2 指標

まず, G の準指標の形を決定することを考える.

補題 3.2.1 c を G の準指標とし, その $G_{\mathfrak{p}}$ への制限を $c_{\mathfrak{p}}$ とする. このとき:

- (i) $c_{\mathfrak{p}}$ は $G_{\mathfrak{p}}$ の準指標.
- (ii) 殆ど全ての $\mathfrak{p}$ に対し, $c_{\mathfrak{p}}$ は $H_{\mathfrak{p}}$ 上自明.
- (iii) c は

$$c(\mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{p}} c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) \quad \forall \mathfrak{a} \in G$$

と分解される (右辺の積において殆ど全ての因子は 1 である).

[証明] (i) 明らか.

(ii) U を $\mathbb{C}^*$ における 1 の近傍で, $\{1\}$ 以外の $\mathbb{C}^*$ の部分群を含まないものとする. c の連続性より, G における 1 の近傍 $N = \prod_{\mathfrak{p}} N_{\mathfrak{p}}$ ($N_{\mathfrak{p}} = H_{\mathfrak{p}} \ \forall \mathfrak{p}$) で, $c(N) \subseteq U$ なるものがとれる. $N_{\mathfrak{p}} = H_{\mathfrak{p}} \ \forall \mathfrak{p} \notin S$ となるような S をとると, $G^S \subseteq N$ となるから $c(G^S) \subseteq U$. ここで G^S は群であるから, $c(G^S) = \{1\}$ とならなければならない. 従って

$$c_{\mathfrak{p}}(H_{\mathfrak{p}}) = \{1\} \quad \forall \mathfrak{p} \notin S.$$

(iii) $\mathbf{a} \in G$ とし, (ii) の S を改めて大きくとり直して $\mathbf{a} \in G_S$ となるようにする. このとき $\mathbf{a}$ を $\mathbf{a} = \prod_{\mathbf{p} \in S} \mathbf{a}_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{a}^S$ ($\mathbf{a}^S \in G^S$) と分解すると,

$$c(\mathbf{a}) = \prod_{\mathbf{p} \in S} c(\mathbf{a}_{\mathbf{p}}) \cdot c(\mathbf{a}^S) = \prod_{\mathbf{p} \in S} c_{\mathbf{p}}(\mathbf{a}_{\mathbf{p}}) = \prod_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}(\mathbf{a}_{\mathbf{p}}).$$

ここで最後の等号は, $\mathbf{p} \notin S$ ならば $c_{\mathbf{p}}(\mathbf{a}_{\mathbf{p}}) = 1$ となることによる. $\square$

補題 3.2.2 各 $\mathbf{p}$ に対し, $G_{\mathbf{p}}$ の準指標 $c_{\mathbf{p}}$ で, 殆ど全ての $\mathbf{p}$ に対して $c_{\mathbf{p}}$ が $H_{\mathbf{p}}$ 上自明であるようなものが与えられているとする. このとき $c(\mathbf{a}) := \prod_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}(\mathbf{a}_{\mathbf{p}})$ は G の準指標を与える.

[証明] 仮定より, $\prod_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}(\mathbf{a}_{\mathbf{p}})$ において殆ど全ての因子は 1 で, c が G から $\mathbb{C}^*$ への抽象群としての準同型を与えることは問題ない. c が連続であることを示すために, $c_{\mathbf{p}}(H_{\mathbf{p}}) = \{1\} \quad \forall \mathbf{p} \notin S$ となるような S をとり, $s := \#S$ と置く. U を $\mathbb{C}^*$ における 1 の近傍とする. $\mathbb{C}^*$ の演算の連続性より, $\mathbb{C}^*$ における 1 の近傍 V で, $V^s \subseteq U$ となるようなものがとれる. また, 各 $\mathbf{p} \in S$ に対し, $c_{\mathbf{p}}$ の連続性より, $G_{\mathbf{p}}$ における 1 の近傍 $N_{\mathbf{p}}$ で, $c_{\mathbf{p}}(N_{\mathbf{p}}) \subseteq V$ となるようなものがとれる. このとき $N := \prod_{\mathbf{p} \in S} N_{\mathbf{p}} \times \prod_{\mathbf{p} \notin S} H_{\mathbf{p}}$ は G における 1 の近傍で, $c(N) \subseteq V^s \subseteq U$. よって c は連続である. $\square$

次に, G の指標群の構造を決定することを考える.

G の準指標 c を $c(\mathbf{a}) = \prod_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}(\mathbf{a}_{\mathbf{p}})$ と分解するとき, $c \in \widehat{G}$ であるためには, 全ての $\mathbf{p}$ に対して $c_{\mathbf{p}} \in \widehat{G}_{\mathbf{p}}$ となる必要かつ十分である. いま, $H_{\mathbf{p}}$ が定義されているような $\mathbf{p}$ に対し,

$$H_{\mathbf{p}}^{\perp} := \{c_{\mathbf{p}} \in \widehat{G}_{\mathbf{p}}; c_{\mathbf{p}}(H_{\mathbf{p}}) = \{1\}\}$$

を $H_{\mathbf{p}}$ の零化群とする^{*15}. このとき, $H_{\mathbf{p}}$ がコンパクトであることより $\widehat{H_{\mathbf{p}}} \cong \widehat{G_{\mathbf{p}}}/H_{\mathbf{p}}^{\perp}$ は離散的になるから, $H_{\mathbf{p}}^{\perp}$ は $\widehat{G_{\mathbf{p}}}$ の開部分群. また, $H_{\mathbf{p}}$ が $G_{\mathbf{p}}$ の開部分群であることより $G_{\mathbf{p}}/H_{\mathbf{p}}$ は離散的になるから, $H_{\mathbf{p}}^{\perp} \cong (G_{\mathbf{p}}/H_{\mathbf{p}})^{\wedge}$ はコンパクト. つまり, $H_{\mathbf{p}}^{\perp}$ は $\widehat{G_{\mathbf{p}}}$ のコンパクトな開部分群である. 従って $\{\widehat{G_{\mathbf{p}}}\}_{\mathbf{p}}$ の $\{H_{\mathbf{p}}^{\perp}\}_{\mathbf{p}}$ に関する制限直積を定義することができる.

定理 3.2.1 指標群 $\widehat{G}$ は, $\{\widehat{G_{\mathbf{p}}}\}_{\mathbf{p}}$ の $\{H_{\mathbf{p}}^{\perp}\}_{\mathbf{p}}$ に関する制限直積と

$$c \longleftrightarrow (c_{\mathbf{p}})_{\mathbf{p}} \quad \left(c(\mathbf{a}) = \prod_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}(\mathbf{a}_{\mathbf{p}}) \right)$$

により自然に (位相群として) 同型になる.

^{*15} 原論文では $H_{\mathbf{p}}^{\perp}$ ではなく $H_{\mathbf{p}}^*$ が用いられている.

[証明] 先の 2 つの補題を指標に対して適用することにより, 上の対応がこれら 2 つの群の抽象群としての同型を与えることがわかる. よって, これら 2 つの群の位相が同一のものであることを示せばよい.

C を G のコンパクトな部分集合とし, U を $\mathbb{T}$ における 1 の開近傍とする. C はコンパクトであるから, 補題 3.1.2 より, $C \subseteq \prod_{\mathfrak{p} \in S} B_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} H_{\mathfrak{p}}$ となるような S がとれる. ただし各 $B_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p} \in S$) は $G_{\mathfrak{p}}$ のコンパクトな部分集合. $s := \#S$ とするとき, $\mathbb{T}$ の演算の連続性より, $\mathbb{T}$ における 1 の開近傍 V で, $V^s \subseteq U$ となるようなものがとれる. このとき, 各 $\mathfrak{p} \in S$ に対して $N_{\mathfrak{p}} := \{c_{\mathfrak{p}} \in \widehat{G}_{\mathfrak{p}}; c_{\mathfrak{p}}(B_{\mathfrak{p}}) \subseteq V\}$ は $\widehat{G}_{\mathfrak{p}}$ における 1 の近傍であるから, $N := \prod_{\mathfrak{p} \in S} N_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} H_{\mathfrak{p}}^{\perp}$ は $\{\widehat{G}_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p}}$ の $\{H_{\mathfrak{p}}^{\perp}\}_{\mathfrak{p}}$ に関する制限直積における 1 の近傍で, $c = (c_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in N$ ならば

$$c(C) \subseteq c\left(\prod_{\mathfrak{p} \in S} B_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} H_{\mathfrak{p}}\right) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} c_{\mathfrak{p}}(B_{\mathfrak{p}}) \subseteq V^s \subseteq U$$

が成り立つ. 従って $N \subseteq \{c \in \widehat{G}; c(C) \subseteq U\}$.

逆に, $N = \prod_{\mathfrak{p} \in S} N_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} H_{\mathfrak{p}}^{\perp}$ を $\widehat{G}$ における 1 の近傍とする. ただし各 $N_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p} \in S$) は $\widehat{G}_{\mathfrak{p}}$ における 1 の近傍. 各 $\mathfrak{p} \in S$ に対し, $G_{\mathfrak{p}}$ のコンパクトな部分集合 $B_{\mathfrak{p}}$ および $\mathbb{T}$ における 1 の開近傍 $U_{\mathfrak{p}}$ で,

$$\{c_{\mathfrak{p}} \in \widehat{G}_{\mathfrak{p}}; c_{\mathfrak{p}}(B_{\mathfrak{p}}) \subseteq U_{\mathfrak{p}}\} \subseteq N_{\mathfrak{p}}$$

となるようなものがとれる. ここで $1 \in B_{\mathfrak{p}}$ であるとして一般性を失わない. $\mathbb{T}$ における 1 の近傍 $U \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in S} U_{\mathfrak{p}}$ で, $\{1\}$ 以外の $\mathbb{T}$ の部分群を含まないものをとる. このとき, $C := \prod_{\mathfrak{p} \in S} B_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} H_{\mathfrak{p}}$ は G のコンパクトな部分集合である. いま, $c = (c_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \widehat{G}$ が $c(C) \subseteq U$ をみたすとする. $\mathfrak{p} \in S$ ならば $c_{\mathfrak{p}}(B_{\mathfrak{p}}) \subseteq c(C) \subseteq U \subseteq U_{\mathfrak{p}}$ より $c_{\mathfrak{p}} \in N_{\mathfrak{p}}$. また $\mathfrak{p} \notin S$ ならば $c_{\mathfrak{p}}(H_{\mathfrak{p}}) \subseteq c(C) \subseteq U$ より $c_{\mathfrak{p}}(H_{\mathfrak{p}}) = \{1\}$ となり $c_{\mathfrak{p}} \in H_{\mathfrak{p}}^{\perp}$. よって $c \in N$ となり, $\{c \in \widehat{G}; c(C) \subseteq U\} \subseteq N$ がわかる. $\square$

3.3 測度

以下, 添字集合 M は高々可算であるものとする^{*16}.

各 $\mathfrak{p}$ に対し, $G_{\mathfrak{p}}$ の Haar 測度 $d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ で

$$\int_{H_{\mathfrak{p}}} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = 1 \quad \forall' \mathfrak{p}$$

となっているようなものをとる. このとき G の Haar 測度 $d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ で, 適当な意味で $d\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ と書けるようなものが定義できることを示す.

^{*16}この仮定は原論文にはないが, M が非可算だと以下の議論はうまく行かない.

まず, 各 S に対し, $G_S = \prod_{\mathfrak{p} \in S} G_{\mathfrak{p}} \times G^S$ の Haar 測度 $d\mathfrak{a}_S$ を $d\mathfrak{a}_S := \prod_{\mathfrak{p} \in S} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \cdot d\mathfrak{a}^S$ と定める. ここで $d\mathfrak{a}^S$ はコンパクト群 G^S の Haar 測度で,

$$\int_{G^S} d\mathfrak{a}^S = \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \int_{H_{\mathfrak{p}}} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$$

と正規化されたものである.

いま $S_1 \subseteq S_2$ とする. このとき G^{S_1} を $G^{S_1} = \prod_{\mathfrak{p} \in S_2 - S_1} H_{\mathfrak{p}} \times G^{S_2}$ と分解することにより, $d\mathfrak{a}^{S_1} = \prod_{\mathfrak{p} \in S_2 - S_1} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \cdot d\mathfrak{a}^{S_2}$ となることがわかる. 実際, $d\mathfrak{a}^{S_1}$ と $\prod_{\mathfrak{p} \in S_2 - S_1} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \cdot d\mathfrak{a}^{S_2}$ はコンパクト群 G^{S_1} に同じ測度を与える:

$$\int_{G^{S_1}} \prod_{\mathfrak{p} \in S_2 - S_1} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \cdot d\mathfrak{a}^{S_2} = \prod_{\mathfrak{p} \in S_2 - S_1} \int_{H_{\mathfrak{p}}} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \cdot \int_{G^{S_2}} d\mathfrak{a}^{S_2} = \prod_{\mathfrak{p} \notin S_1} \int_{H_{\mathfrak{p}}} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \int_{G^{S_1}} d\mathfrak{a}^{S_1}.$$

従って G_{S_1} 上

$$d\mathfrak{a}_{S_1} = \prod_{\mathfrak{p} \in S_1} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \cdot d\mathfrak{a}^{S_1} = \prod_{\mathfrak{p} \in S_1} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \in S_2 - S_1} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \cdot d\mathfrak{a}^{S_2} = d\mathfrak{a}_{S_2}$$

となり, $d\mathfrak{a}_{S_2}$ を G_{S_1} に制限したものは $d\mathfrak{a}_{S_1}$ に一致する.

各 S に対し, G_S は G の開部分群であるから, G の Haar 測度 $d\mathfrak{a}$ で, その G_S への制限が $d\mathfrak{a}_S$ であるようなものがただ 1 つ存在する. 上で述べたことより, このような $d\mathfrak{a}$ は S の選び方に依らずに一意的に定まる.

以上により, G の Haar 測度 $d\mathfrak{a}$ で, 標語的に $d\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ と書けるようなものが定まった.

一般に, S の函数 $\varphi(S) \in \mathbb{C}$ (resp. $\psi(S) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$) が $\varphi_0 \in \mathbb{C}$ に収束する (resp. ∞ に発散する) とは, 次が成り立つことをいう:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (\text{resp. } \forall R > 0) \quad \exists S_0 \quad \text{s.t.} \quad S_0 \subseteq S \implies |\varphi(S) - \varphi_0| < \varepsilon \quad (\text{resp. } \psi(S) > R).$$

このことを $\lim_S \varphi(S) = \varphi_0$ (resp. $\lim_S \psi(S) = \infty$) と表す.

補題 3.3.1 $f(\mathfrak{a})$ を G 上の可測函数で, 次の条件 (i), (ii) のいずれかをみたすものとする:

(i) $f(\mathfrak{a}) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;

(ii) $f(\mathfrak{a}) \in L_1(G)$.

このとき次が成り立つ:

$$\int_G f(\mathfrak{a}) d\mathfrak{a} = \lim_S \int_{G_S} f(\mathfrak{a}) d\mathfrak{a}.$$

ただし (i) の場合には両辺の値として ∞ も許す.

[証明] M は高々可算であるから,

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq \cdots, \quad M = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

なる列 $\{S_n\}_n$ をとることができる. このとき任意の S はある S_n に含まれる.

(i) 各 S に対し,

$$\psi(S) := \int_{G_S} f(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

と置く. また,

$$\psi_0 := \int_G f(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

と置く. このとき単調収束定理より $\psi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(S_n)$ となることがわかる. いま $\psi_0 < \infty$ (resp. $\psi_0 = \infty$) とし, 任意に $\varepsilon > 0$ (resp. $R > 0$) を固定すると,

$$\exists N \quad \text{s.t.} \quad N \leq n \implies |\psi(S_n) - \psi_0| < \varepsilon \quad (\text{resp. } \psi(S_n) > R).$$

従って $S_N \subseteq S \subseteq S_n$ ($N \leq n$) とするとき, $\psi(S_N) \leq \psi(S) \leq \psi(S_n) \leq \psi_0$ となり,

$$|\psi(S) - \psi_0| \leq |\psi(S_N) - \psi_0| < \varepsilon \quad (\text{resp. } \psi(S) \geq \psi(S_N) > R).$$

故に $\lim_S \psi(S) = \psi_0$ となる.

(ii) 各 S に対し,

$$\varphi(S) := \int_{G_S} f(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \in \mathbb{C}, \quad \psi(S) := \int_{G_S} |f(\mathbf{a})| d\mathbf{a} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

と置く. また

$$\varphi_0 := \int_G f(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \in \mathbb{C}, \quad \psi_0 := \int_G |f(\mathbf{a})| d\mathbf{a} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

と置く. このとき優収束定理より $\varphi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(S_n)$, $\psi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(S_n)$ となることがわかる. いま任意に $\varepsilon > 0$ を固定すると,

$$\exists N \quad \text{s.t.} \quad N \leq n \implies |\varphi(S_n) - \varphi_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\psi(S_n) - \psi_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

従って $S_N \subseteq S \subseteq S_n$ ($N \leq n$) とするとき,

$$|\varphi(S) - \varphi_0| \leq |\varphi(S) - \varphi(S_N)| + |\varphi(S_N) - \varphi_0| < |\varphi(S) - \varphi(S_N)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

ここで

$$|\varphi(S) - \varphi(S_N)| \leq \int_{G_S - G_{S_N}} |f(\mathbf{a})| d\mathbf{a} \leq \int_{G_{S_n} - G_{S_N}} |f(\mathbf{a})| d\mathbf{a} = \psi(S_n) - \psi(S_N) < \frac{\varepsilon}{2}$$

であるから $|\varphi(S) - \varphi_0| < \varepsilon$. 故に $\lim_S \varphi(S) = \varphi_0$ となる. □

補題 3.3.2 各 $\mathfrak{p}$ に対し, 連続関数 $f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) \in L_1(G_{\mathfrak{p}})$ で, 殆ど全ての $\mathfrak{p}$ に対して $f_{\mathfrak{p}}(H_{\mathfrak{p}}) = \{1\}$ であるようなものが与えられているとする. このとき, G 上の関数 $f(\mathfrak{a})$ を $f(\mathfrak{a}) := \prod_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ によって定めると, 次が成り立つ:

(i) $f(\mathfrak{a})$ は G 上連続.

(ii) 条件

$$f_{\mathfrak{p}}(H_{\mathfrak{p}}) = \{1\}, \quad \int_{H_{\mathfrak{p}}} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = 1 \quad \forall \mathfrak{p} \notin S$$

をみたすような S をとるとき, $f(\mathfrak{a}) \in L_1(G_S)$ で,

$$\int_{G_S} f(\mathfrak{a}) d\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \int_{G_{\mathfrak{p}}} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}.$$

[証明] (i) $f(\mathfrak{a})$ は明らかに任意の G_S 上, 従って G 上連続.

(ii) G_S 上 $f(\mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ であるから,

$$\int_{G_S} f(\mathfrak{a}) d\mathfrak{a} = \int_{G_S} f(\mathfrak{a}) d\mathfrak{a}_S = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \int_{G_{\mathfrak{p}}} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \cdot \int_{G^S} d\mathfrak{a}^S = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \int_{G_{\mathfrak{p}}} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}.$$

□

定理 3.3.1 $f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ ならびに $f(\mathfrak{a})$ は上の補題の通りとし, さらに

$$\prod_{\mathfrak{p}} \int_{G_{\mathfrak{p}}} |f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})| d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} := \lim_S \prod_{\mathfrak{p} \in S} \int_{G_{\mathfrak{p}}} |f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})| d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} < \infty$$

とする. このとき $f(\mathfrak{a}) \in L_1(G)$ で,

$$\int_G f(\mathfrak{a}) d\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}} \int_{G_{\mathfrak{p}}} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}.$$

[証明] $|f(\mathfrak{a})| = \prod_{\mathfrak{p}} |f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})|$ であるから, 上の 2 つの補題より

$$\int_G |f(\mathfrak{a})| d\mathfrak{a} = \lim_S \int_{G_S} |f(\mathfrak{a})| d\mathfrak{a} = \lim_S \prod_{\mathfrak{p} \in S} \int_{G_{\mathfrak{p}}} |f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})| d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} < \infty.$$

従って $f(\mathfrak{a}) \in L_1(G)$ となり, 再び補題より

$$\int_G f(\mathfrak{a}) d\mathfrak{a} = \lim_S \int_{G_S} f(\mathfrak{a}) d\mathfrak{a} = \lim_S \prod_{\mathfrak{p} \in S} \int_{G_{\mathfrak{p}}} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$$

を得る. なお, 殆ど全ての $\mathfrak{p}$ に対して

$$\int_{G_{\mathfrak{p}}} |f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})| d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \geq \int_{H_{\mathfrak{p}}} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = 1$$

が成り立つから,

$$\prod_{\mathfrak{p} \in S} \int_{G_{\mathfrak{p}}} |f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})| d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$$

が S に依らずに有界ならば極限

$$\lim_S \prod_{\mathfrak{p} \in S} \int_{G_{\mathfrak{p}}} |f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})| d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} < \infty$$

が存在する. □

最後に, 制限直積における Fourier 解析について述べておく. 既に示したように, G の指標群 $\widehat{G}$ は $\{\widehat{G}_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p}}$ の $\{H_{\mathfrak{p}}^{\perp}\}_{\mathfrak{p}}$ に関する制限直積と同型である. 各 $\mathfrak{p}$ に対し, $dc_{\mathfrak{p}}$ を $d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ の双対測度とする. $f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ を $H_{\mathfrak{p}}$ の特性函数とすると, その Fourier 変換

$$\widehat{f}_{\mathfrak{p}}(c_{\mathfrak{p}}) = \int_{G_{\mathfrak{p}}} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) \overline{c_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$$

は $H_{\mathfrak{p}}^{\perp}$ の特性函数に $H_{\mathfrak{p}}$ の測度を掛けたものに等しい. このことと反転公式により

$$\int_{H_{\mathfrak{p}}} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \int_{H_{\mathfrak{p}}^{\perp}} dc_{\mathfrak{p}} = 1$$

となることがわかる. 従って

$$\int_{H_{\mathfrak{p}}^{\perp}} dc_{\mathfrak{p}} = 1 \quad \forall \mathfrak{p}$$

となり, 上と同様にして $\widehat{G}$ の Haar 測度 $dc = \prod_{\mathfrak{p}} dc_{\mathfrak{p}}$ を定めることができる.

補題 3.3.3 全ての $\mathfrak{p}$ に対して $f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) \in \mathfrak{V}_1(G_{\mathfrak{p}})$ で, 殆ど全ての $\mathfrak{p}$ に対して $f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ が $H_{\mathfrak{p}}$ の特性函数であるならば, $f(\mathfrak{a}) := \prod_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ は $\mathfrak{V}_1(G)$ に属し, 次が成り立つ:

$$\widehat{f}(c) = \prod_{\mathfrak{p}} \widehat{f}_{\mathfrak{p}}(c_{\mathfrak{p}}).$$

[証明] 定理 3.3.1 を函数 $f(\mathfrak{a}) \overline{c}(\mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) \overline{c_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ に適用することにより, $\widehat{f}(c) = \prod_{\mathfrak{p}} \widehat{f}_{\mathfrak{p}}(c_{\mathfrak{p}})$ となることがわかる. また, $f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) \in \mathfrak{V}_1(G_{\mathfrak{p}})$ より $\widehat{f}_{\mathfrak{p}}(c_{\mathfrak{p}}) \in \mathfrak{V}_1(\widehat{G}_{\mathfrak{p}})$ であって, 先に述べたように殆ど全ての $\mathfrak{p}$ に対して $\widehat{f}_{\mathfrak{p}}$ は $H_{\mathfrak{p}}^{\perp}$ の特性函数である. これより $\widehat{f}(c) \in L_1(\widehat{G})$ となることがわかり, $f(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{V}_1(G)$ となる. □

系 3.3.1 $dc = \prod_{\mathfrak{p}} dc_{\mathfrak{p}}$ は $d\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ の双対測度である.

[証明] 上の補題を群 $\widehat{G}$ と測度 dc に対して適用すると, 各成分ごとの反転公式により積函数に関する反転公式

$$f(\mathfrak{a}) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(c) c(\mathfrak{a}) dc$$

を得る. □

4 大域的理論

本節を通して k で有限次代数体を表し, k の素点を一般に $\mathfrak{p}$ で表す. k の $\mathfrak{p}$ における完備化を $k_{\mathfrak{p}}$ と書き, §2 において局所体 $k_{\mathfrak{p}}$ に対して定義された $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{d}$, $\|\cdot\|$, Λ , c 等をそれぞれ $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$, $\Lambda_{\mathfrak{p}}$, $c_{\mathfrak{p}}$ 等と書く (ただし $k_{\mathfrak{p}}$ の付値イデアルは $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ ではなく単に $\mathfrak{p}$ と書く). また, k の無限素点全体のなす集合を S_{∞} で表す.

4.1 加法的理論

定義 4.1.1 k のアデール環とは $\{k_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p}}$ の $\{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p}}$ に関する制限直積をいう.

アデール環の加法群を V で表し, その一般の元を $\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ と書くことにする. 定理 3.2.1, 定理 2.2.1 および補題 2.2.3 より V の指標群は $\{k_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p}}$ の $\{\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}^{-1}\}_{\mathfrak{p}}$ に関する制限直積と自然に同型になるが, 殆ど全ての $\mathfrak{p}$ に対して $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ となっているから, この制限直積は V に他ならない. つまり $\eta = (\eta_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in V$ は V の指標

$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \mapsto \prod_{\mathfrak{p}} \exp(2\pi i \Lambda_{\mathfrak{p}}(\eta_{\mathfrak{p}} \mathfrak{x}_{\mathfrak{p}})) = \exp\left(2\pi i \sum_{\mathfrak{p}} \Lambda_{\mathfrak{p}}(\eta_{\mathfrak{p}} \mathfrak{x}_{\mathfrak{p}})\right)$$

と同一視される. (連続な) 準同型 $\Lambda : V \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を

$$\Lambda(\mathfrak{x}) := \sum_{\mathfrak{p}} \Lambda_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}})$$

(右辺の和において殆ど全ての項は 0 である) と定めることにより, アデール環の乗法を使って, 上のことは次のように述べられる:

定理 4.1.1 (大域体の自己双対性) 位相群としての同型写像

$$V \ni \eta \mapsto e^{2\pi i \Lambda(\eta \mathfrak{x})} \in \widehat{V}$$

により, $\widehat{V}$ は V と自然に同一視される.

V の Haar 測度として, §3.3 で述べた測度 $d\mathfrak{x} = \prod_{\mathfrak{p}} d\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}}$ をとる. ここで $d\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}}$ は §2.2 で定義した加法的測度である. これらの局所的測度 $d\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}}$ は自己双対的であるから, 系 3.3.1 より $d\mathfrak{x}$ も自己双対的になる:

定理 4.1.2 $f(\mathfrak{x}) \in L_1(V)$ に対し, その Fourier 変換 $\widehat{f}(\eta)$ を

$$\widehat{f}(\eta) := \int_V f(\mathfrak{x}) e^{-2\pi i \Lambda(\eta \mathfrak{x})} d\mathfrak{x}$$

により定める. このとき $f(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{V}_1(V)$ に対して反転公式

$$f(\mathfrak{x}) = \int_V \widehat{f}(\eta) e^{2\pi i \Lambda(\eta \mathfrak{x})} d\eta = \widehat{\widehat{f}}(-\mathfrak{x})$$

が成り立つ.

局所的理論における補題 2.2.4 と補題 2.2.5, すなわち

$$d(\alpha\xi) = \|\alpha\|_p d\xi \quad (\alpha \in k_p^*)$$

の大域的な形を求めることを考える. 局所的な考察においては, α は k_p の自己同型 $\xi \mapsto \alpha\xi$ に対応した. では, どのような $\mathfrak{a} \in V$ に対して $\mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{a}\mathfrak{x}$ は V の自己同型になるだろうか? まず, 任意の $\mathfrak{a} \in V$ に対して $\mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{a}\mathfrak{x}$ は V の連続な自己準同型である. これが同型であるためには $\mathfrak{a}$ がアデール環の単数であることが必要で, そのとき $\mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{x}$ がその逆写像を与える. ここで, $\mathfrak{a}$ がアデール環の単数であるためには, 全ての $\mathfrak{p}$ に対して $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \neq 0$ かつ殆ど全ての $\mathfrak{p}$ に対して^{*17} $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-1} \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ (従って, 殆ど全ての $\mathfrak{p}$ に対して $\|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}} = 1$) となることが必要かつ十分である. これらの条件は $\mathfrak{a}$ が Chevalley の意味でのイデールであることを意味する. 以上で次が示せた:

補題 4.1.1 写像 $\mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{a}\mathfrak{x}$ が V の自己同型であるためには $\mathfrak{a}$ がイデールであることが必要かつ十分.

当面 “イデール” という言葉は上で述べた意味でのみ用いる. §4.3 においてイデール全体のなす乗法群は $\{k_p^*\}_p$ の $\{u_p\}_p$ に関する制限直積として考察される.

V の自己同型に関する測度の変換を考えるという元々の問いに対する答えは次のような形で与えられる:

補題 4.1.2 イデール $\mathfrak{a}$ に対し,

$$d(\mathfrak{a}\mathfrak{x}) = \|\mathfrak{a}\| d\mathfrak{x}.$$

ただし,

$$\|\mathfrak{a}\| := \prod_{\mathfrak{p}} \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}}$$

(右辺の積において殆ど全ての因子は 1 である)^{*18}.

[証明] $N = \prod_{\mathfrak{p}} N_{\mathfrak{p}}$ を V における 0 のコンパクト近傍とすると, 定理 3.3.1 と補題 2.2.5 より,

$$\int_{\mathfrak{a}N} d\mathfrak{x} = \prod_{\mathfrak{p}} \int_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}N_{\mathfrak{p}}} d\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} = \prod_{\mathfrak{p}} \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}} \int_{N_{\mathfrak{p}}} d\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} = \prod_{\mathfrak{p}} \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}} \cdot \prod_{\mathfrak{p}} \int_{N_{\mathfrak{p}}} d\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} = \|\mathfrak{a}\| \int_N d\mathfrak{x}.$$

これより主張を得る. □

最後に加法群 k が V の中にどのように埋め込まれるのかを見る. 写像 $k \ni \xi \mapsto \mathfrak{x} \in V$ を $\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} := \xi \quad \forall \mathfrak{p}$ により定めると, これは単射準同型であるから, この埋め込みによって k を V の部分群と見なすことができる.

^{*17}原論文の “for almost all $\mathfrak{x}$ ” はミスプリント.

^{*18}原論文では $|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}}$ を $|\mathfrak{a}|_{\mathfrak{p}}$ と略記している箇所が多い.

補題 4.1.3 (i) $k \cap V_{S_\infty} = \mathfrak{o}$. ここで $\mathfrak{o}$ は k の整数環を表す.

(ii) $k + V_{S_\infty} = V$.

[証明] $V_{S_\infty} = \prod_{\mathfrak{p} \in S_\infty} k_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S_\infty} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ であるから:

(i) これは単に “ $\xi \in k$ が代数的整数であるためには, それが全ての有限素点において整数であることが必要かつ十分である” ということを主張しているに過ぎない.

(ii) この主張の意味するところは

$$\forall \mathfrak{x} \in V \quad \exists \xi \in k \quad \text{s.t.} \quad \mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} - \xi \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \quad \forall \mathfrak{p} \notin S_\infty$$

に他ならない. 任意の $\mathfrak{x} \in V$ に対し, $\alpha \mathfrak{x} \in V_{S_\infty}$ となるような $\alpha \in \mathfrak{o}, \alpha \neq 0$ をとることができる. このとき, 方程式

$$\eta \equiv \alpha \mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} \pmod{\mathfrak{p}^{\text{ord}_{\mathfrak{p}} \alpha}}$$

は殆ど全ての $\mathfrak{p} \notin S_\infty$ に対しては (正確には $\text{ord}_{\mathfrak{p}} \alpha = 0$ なる $\mathfrak{p} \notin S_\infty$ に対しては) 全ての $\eta \in \mathfrak{o}$ を解とする. 従って, Chinese Remainder Theorem により, 連立方程式

$$\eta \equiv \alpha \mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} \pmod{\mathfrak{p}^{\text{ord}_{\mathfrak{p}} \alpha}} \quad \forall \mathfrak{p} \notin S_\infty$$

は解 $\eta \in \mathfrak{o}$ をもつことがわかる. $\xi := \eta/\alpha$ が求めるものである. □

いま $V^\infty := \prod_{\mathfrak{p} \in S_\infty} k_{\mathfrak{p}}$ を V の “無限部分” とする. k の共役体のうち r_1 個が実, $2r_2$ 個が虚であるとする. V^∞ は r_1 個の実直線 $\mathbb{R}$ と r_2 個の複素平面 $\mathbb{C}$ との直積になり, $n := r_1 + 2r_2 = [k : \mathbb{Q}]$ 次元の実ベクトル空間になる. $\mathfrak{x} \in V$ に対し, その V^∞ への射影 $(\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in S_\infty}$ を $\mathfrak{x}^\infty$ と書く.

補題 4.1.4 $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ を $\mathfrak{o}$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底とするとき:

(i) $\{\omega_1^\infty, \omega_2^\infty, \dots, \omega_n^\infty\}$ は V^∞ の $\mathbb{R}$ 上の基底になる.

(ii) この基底から定まる平行体

$$D^\infty := \left\{ \mathfrak{x}^\infty = \sum_{\nu=1}^n x_\nu \omega_\nu^\infty \in V^\infty ; \quad 0 \leq x_\nu < 1 \right\}$$

の測度 $d\mathfrak{x}^\infty := \prod_{\mathfrak{p} \in S_\infty} d\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}}$ に関する体積は $\sqrt{|d|}$ になる. ここで d は k の (絶対) 判別式.

[証明] k から V^∞ への射影 $\xi \mapsto \xi^\infty$ は代数体 k の $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ への古典的な埋め込みに他ならない. $d \neq 0$ であるから $\{\omega_1^\infty, \omega_2^\infty, \dots, \omega_n^\infty\}$ は $\mathbb{R}$ 上 1 次独立になり, これより (i) を得る. また, 行列式を計算することにより D^∞ の (通常の Lebesgue 測度に関する) 体積は $2^{-r_2} \sqrt{|d|}$ になることがわかる. いまの場合, 虚な無限素点 $\mathfrak{p}$ に対しては $d\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}}$ は通常の測度の 2 倍であるから, (ii) が得られる. □

定義 4.1.2 集合

$$D := \{\mathfrak{x} \in V_{S_\infty} ; \mathfrak{x}^\infty \in D^\infty\}$$

を加法的基本領域という.

定理 4.1.3 (i) 任意の $\mathfrak{x} \in V$ は $k (\subseteq V)$ を法としてただ 1 つの D の元と合同である:

$$V = \coprod_{\xi \in k} (\xi + D).$$

(ii) D の測度は 1 である.

[証明] (i) $\mathfrak{x} \in V$ に対し, 補題 4.1.3 より $\mathfrak{x} - \xi_1 \in V_{S_\infty}$ となるような $\xi_1 \in k$ が $\mathfrak{o}$ を法として一意的に存在する. $(\mathfrak{x} - \xi_1)^\infty \in V^\infty$ を補題 4.1.4 の (i) により $(\mathfrak{x} - \xi_1)^\infty = \sum_{\nu=1}^n x_\nu \omega_\nu^\infty$ ($x_\nu \in \mathbb{R}$) と表し, $\xi_2 := \sum_{\nu=1}^n [x_\nu] \omega_\nu$ と置くと $\xi_2 \in \mathfrak{o}$ で,

$$(\mathfrak{x} - \xi_1 - \xi_2)^\infty = \sum_{\nu} (x_\nu - [x_\nu]) \omega_\nu^\infty \in D^\infty$$

が成り立つ. そこで $\xi := \xi_1 + \xi_2$ と置くと $\xi \in k$ で,

$$\mathfrak{x} - \xi \in V_{S_\infty}, \quad (\mathfrak{x} - \xi)^\infty \in D^\infty,$$

すなわち $\mathfrak{x} - \xi \in D$ となる. また, このような $\xi \in k$ の一意性は容易にわかる.

(ii) $D \subseteq V_{S_\infty}$ および $D = D^\infty \times V^{S_\infty}$ に注意すると

$$\int_D d\mathfrak{x} = \int_D d\mathfrak{x}_{S_\infty} = \int_{D^\infty \times V^{S_\infty}} d\mathfrak{x}^\infty \cdot d\mathfrak{x}^{S_\infty} = \int_{D^\infty} d\mathfrak{x}^\infty \prod_{\mathfrak{p} \notin S_\infty} \int_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}} d\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} = \sqrt{|d|} \prod_{\mathfrak{p} \notin S_\infty} N\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}^{-1/2}$$

となることがわかる^{*19}. ここで, k の判別式の絶対値 $|d|$ は共役差積^{*20} $\mathfrak{d}$ のノルムに一致し, また $\mathfrak{d}$ は局所的な共役差積の積に分解されるから, $|d| = \prod_{\mathfrak{p} \notin S_\infty} N\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}$ となる. これより主張を得る. $\square$

系 4.1.1 k は V の離散的な部分群で, 剰余群 V/k はコンパクトになる.

[証明] D は内点をもつから k は離散的である. また D は相対コンパクトであるから V/k はコンパクトになる. $\square$

補題 4.1.5 (和公式) 任意の $\xi \in k$ に対し, $\Lambda(\xi) = 0$.

^{*19}原論文の “ $\prod_{\mathfrak{p} \notin S}$ ” はミスプリント

^{*20}原論文の “absolute different $\mathfrak{b}$ ” はミスプリント.

[証明] $\xi \in k$ に対し,

$$\Lambda(\xi) = \sum_{\mathfrak{p}} \Lambda_{\mathfrak{p}}(\xi) = \sum_p \lambda_p \left(\sum_{\mathfrak{p}|p} S_{\mathfrak{p}} \xi \right) = \sum_p \lambda_p(S\xi).$$

ここで $S\xi \in \mathbb{Q}$ であるから, 任意の $x \in \mathbb{Q}$ に対して $\sum_p \lambda_p(x) = 0$ となることを示せばよい. 任意の素数 q に対し, $\sum_p \lambda_p(x)$ は

$$\sum_p \lambda_p(x) = \sum_{p \neq q, \infty} \lambda_p(x) + \lambda_q(x) + \lambda_{\infty}(x) = \sum_{p \neq q, \infty} \lambda_p(x) + (\lambda_q(x) - (x \bmod 1))$$

と表せるが, 定義より

$$\lambda_p(x) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}_q/\mathbb{Z} \quad \forall p \neq q, \infty, \quad \lambda_q(x) - (x \bmod 1) \in \mathbb{Z}_q/\mathbb{Z}$$

が成り立つ. よって $\sum_p \lambda_p(x) \in \mathbb{Z}_q/\mathbb{Z}$ となり, q が任意であることより $\sum_p \lambda_p(x) = 0$ がわかる. $\square$

定理 4.1.4 $k \subseteq V$ の ($\widehat{V} = V$ における) 零化群

$$k^{\perp} = \{ \mathfrak{x} \in V ; \Lambda(\mathfrak{x}\xi) = 0 \quad \forall \xi \in k \}$$

は k に一致する.

[証明] $k^{\perp}$ はコンパクト群 V/k の指標群であるから離散的になる. 上の補題により $k \subseteq k^{\perp}$ であって, 剰余群 $k^{\perp}/k$ を考えることができる. これはコンパクト群 V/k の離散的な部分群になり, 従って有限群になる. 他方 $k^{\perp}$ は k 上のベクトル空間であり, k は有限体ではないから, 群指数 $[k^{\perp} : k]$ は 1 でなければならない. $\square$

4.2 Riemann-Roch の定理

V 上の関数 $\varphi(\mathfrak{x})$ が周期的であるとは全ての $\xi \in k$ に対して $\varphi(\mathfrak{x} + \xi) = \varphi(\mathfrak{x})$ が成り立つことをいうことにする. 周期的な関数の全体は自然にコンパクト群 V/k 上の関数の全体と同一視できる. $\varphi(\mathfrak{x})$ が V/k 上の連続関数を与えるためには, それが V 上連続であることが必要かつ十分である.

補題 4.2.1 $d\mathfrak{x}$ を V/k の Haar 測度で

$$\int_{V/k} d\mathfrak{x} = 1$$

なるものとする. このとき, V 上の連続かつ周期的な関数 $\varphi(\mathfrak{x})$ に対して次が成り立つ:

$$\int_{V/k} \varphi(\mathfrak{x}) d\mathfrak{x} = \int_D \varphi(\mathfrak{x}) d\mathfrak{x}.$$

[証明] $\mathfrak{y} \in V$ とするとき, $V = \coprod_{\xi \in k} (\xi + D) = \coprod_{\xi \in k} (\mathfrak{y} - \xi + D)$ となることより,

$$\begin{aligned} \int_D \varphi(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) d\mathfrak{x} &= \sum_{\xi \in k} \int_{(\mathfrak{y}+D) \cap (\xi+D)} \varphi(\mathfrak{x}) d\mathfrak{x} = \sum_{\xi \in k} \int_{\xi + (\mathfrak{y}-\xi+D) \cap D} \varphi(\mathfrak{x}) d\mathfrak{x} \\ &= \sum_{\xi \in k} \int_{(\mathfrak{y}-\xi+D) \cap D} \varphi(\mathfrak{x}) d\mathfrak{x} = \int_D \varphi(\mathfrak{x}) d\mathfrak{x} \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って,

$$\varphi(\mathfrak{i}) \mapsto \int_D \varphi(\mathfrak{x}) d\mathfrak{x}$$

は $L(V/k)$ 上の Haar 汎函数を与え, 定理 4.1.3 の (ii) より主張を得る. $\square$

定理 4.1.4 により k は自然に V/k の指標群と見なせる. 従って $\varphi(\mathfrak{x})$ により与えられる V/k 上の函数の Fourier 変換 $\widehat{\varphi}(\xi)$ は

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \int_D \varphi(\mathfrak{x}) e^{-2\pi i \Lambda(\xi \mathfrak{x})} d\mathfrak{x}$$

と定義される.

補題 4.2.2 $\varphi(\mathfrak{x})$ を連続, 周期的かつ $\sum_{\xi \in k} |\widehat{\varphi}(\xi)| < \infty$ なる函数とする. このとき, 反転公式

$$\varphi(\mathfrak{x}) = \sum_{\xi \in k} \widehat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i \Lambda(\mathfrak{x} \xi)}$$

が成り立つ.

[証明] k の数え上げ測度が上で定めた V/k の Haar 測度 $d\mathfrak{x}$ の双対測度であることによる^{*21}. $\square$

補題 4.2.3 $f(\mathfrak{x})$ を V 上の連続, 総和可能かつ $\sum_{\eta \in k} f(\mathfrak{x} + \eta)$ が D 上一様に (絶対) 収束するような函数とする. このとき $\varphi(\mathfrak{x}) := \sum_{\eta \in k} f(\mathfrak{x} + \eta)$ は周期的な連続函数で, $\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ をみたす.

[証明]

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_D \varphi(\mathfrak{x}) e^{-2\pi i \Lambda(\xi \mathfrak{x})} d\mathfrak{x} = \int_D \sum_{\eta \in k} f(\mathfrak{x} + \eta) e^{-2\pi i \Lambda(\xi \mathfrak{x})} d\mathfrak{x}$$

であるが, 収束の一様性および D の測度が有限であることより, 積分と和の順序は交換可能である. また, $\Lambda(\xi \eta) = 0$ より

$$\int_D f(\mathfrak{x} + \eta) e^{-2\pi i \Lambda(\xi \mathfrak{x})} d\mathfrak{x} = \int_{D+\eta} f(\mathfrak{x}) e^{-2\pi i \Lambda(\xi \mathfrak{x} - \xi \eta)} d\mathfrak{x} = \int_{D+\eta} f(\mathfrak{x}) e^{-2\pi i \Lambda(\xi \mathfrak{x})} d\mathfrak{x}.$$

^{*21}例 A.3.1 を参照のこと.

従って

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \sum_{\eta \in k} \int_{D+\eta} f(\mathfrak{x}) e^{-2\pi i \Lambda(\xi \mathfrak{x})} d\mathfrak{x} = \int_V f(\mathfrak{x}) e^{-2\pi i \Lambda(\xi \mathfrak{x})} d\mathfrak{x}$$

となり, これは $\widehat{f}(\xi)$ に等しい. なお, $\varphi(\mathfrak{x})$ の周期性と連続性は明らか. $\square$

補題 4.2.2 と 4.2.3 を組み合わせて, 補題 4.2.2 において $\mathfrak{x} = 0$ と置くことにより次を得る:

補題 4.2.4 (Poisson の和公式) $f(\mathfrak{x})$ を V 上の関数で, 次の条件をみたすものとする:

- (i) $f(\mathfrak{x})$ は連続かつ V 上総和可能;
- (ii) $\sum_{\xi \in k} f(\mathfrak{x} + \xi)$ は D 上一様収束;
- (iii) $\sum_{\xi \in k} |\widehat{f}(\xi)| < \infty$.

このとき,

$$\sum_{\xi \in k} \widehat{f}(\xi) = \sum_{\xi \in k} f(\xi).$$

$f(\mathfrak{x})$ を $f(\mathfrak{a}\mathfrak{x})$ ($\mathfrak{a}$ はイデール) で置き換えることにより, Riemann-Roch の定理の数論版とでも呼ぶべき次の定理が得られる:

定理 4.2.1 (Riemann-Roch の定理) $f(\mathfrak{x})$ を V 上の関数で, 次の条件をみたすものとする:

- (i) $f(\mathfrak{x})$ は連続かつ V 上総和可能;
- (ii) 任意のイデール $\mathfrak{a}$ および任意のアデール $\mathfrak{x}$ に対して $\sum_{\xi \in k} f(\mathfrak{a}(\mathfrak{x} + \xi))$ は収束し, かつ $\mathfrak{x} \in D$ に関してこの収束は一様;
- (iii) 任意のイデール $\mathfrak{a}$ に対し, $\sum_{\xi \in k} |\widehat{f}(\mathfrak{a}\xi)| < \infty$.

このとき,

$$\frac{1}{\|\mathfrak{a}\|} \sum_{\xi \in k} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right) = \sum_{\xi \in k} f(\mathfrak{a}\xi).$$

[証明] $g(\mathfrak{x}) := f(\mathfrak{a}\mathfrak{x})$ は上の補題の条件をみたす. 実際, (i) と (ii) については明らかであり, (iii) については

$$\widehat{g}(\eta) = \int_V f(\mathfrak{a}\mathfrak{x}) e^{-2\pi i \Lambda(\eta \mathfrak{x})} d\mathfrak{x} = \frac{1}{\|\mathfrak{a}\|} \int_V f(\mathfrak{x}) e^{-2\pi i \Lambda(\eta \mathfrak{x}/\mathfrak{a})} d\mathfrak{x} = \frac{1}{\|\mathfrak{a}\|} \widehat{f}\left(\frac{\eta}{\mathfrak{a}}\right)$$

より,

$$\sum_{\xi \in k} |\widehat{g}(\xi)| = \frac{1}{\|\mathfrak{a}\|} \sum_{\xi \in k} \left| \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right) \right| < \infty.$$

従って補題より

$$\frac{1}{\|\mathfrak{a}\|} \sum_{\xi \in k} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right) = \sum_{\xi \in k} \widehat{g}(\xi) = \sum_{\xi \in k} g(\xi) = \sum_{\xi \in k} f(\mathfrak{a}\xi).$$

$\square$

以上では D の測度が 1 であることを使って計算してきたが, これらの議論の全ては D の測度, それを $\mu(D)$ とする, が必ずしも定まっていなくともそのまま成り立つ. そのとき補題 4.2.2 の反転公式は

$$\varphi(\mathfrak{x}) = \frac{1}{\mu(D)} \sum_{\xi \in k} \widehat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i \Lambda(\mathfrak{x}\xi)}$$

となり, Poisson の和公式は

$$\frac{1}{\mu(D)} \sum_{\xi \in k} \widehat{f}(\xi) = \sum_{\xi \in k} f(\xi)$$

となる. これをもう一度繰り返すことにより $\mu(D)^2 = 1$ となることがわかり, 結局 $\mu(D) = 1$ となる.

4.3 乗法的理論

定義 4.3.1 k のイデール群とは $\{k_{\mathfrak{p}}^*\}_{\mathfrak{p}}$ の $\{u_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p}}$ に関する制限直積をいう.

イデール群を I で表し, その一般の元を $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ と書くことにする. §4.1 で述べたように, 位相を無視すればイデール群はアデール環の単数群に他ならない. しかし, イデール群の位相はアデール環のそれを制限して得られるものよりも強く, 従って V 上の連続関数 $f(\mathfrak{x})$ より得られる I 上の関数 $f(\mathfrak{a})$ は自動的に連続になる.

$\mathcal{I}$ を k のイデール群とするとき, 写像

$$\varphi : I \ni \mathfrak{a} \longmapsto \prod_{\mathfrak{p} \notin S_{\infty}} \mathfrak{p}^{\text{ord}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}} \in \mathcal{I}$$

は全射準同型で, その核 $I_{S_{\infty}} = \prod_{\mathfrak{p} \in S_{\infty}} k_{\mathfrak{p}}^* \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S_{\infty}} u_{\mathfrak{p}}$ は I の開部分群である. 従って $\mathcal{I}$ に離散位相を入れて位相群と見なすと φ は連続になる. 無限素点や有限素点における単数を考慮に入れているという点で, イデールはイデアルの拡張であると考えることができる.

§3.2 により, I の一般の準指標は $c(\mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{p}} c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ の形に書ける. ただし $c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ は §2.3 で述べた局所的な準指標で, 殆ど全ての $\mathfrak{p}$ に対して分岐していない (*i.e.* $c_{\mathfrak{p}}(u_{\mathfrak{p}}) = \{1\}$) ようなものである.

I の Haar 測度としては $d^*\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}} d^*\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ がとれる. ここで $d^*\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ は §2.3 で定義した局所的な乗法的測度である.

k の乗法群 k^* はイデール群 I に自然に埋め込まれる. 本節の残りの部分では I の部分群 k^* に関する相対的な構造について述べる. まず, イデール $\alpha \in k^*$ に対する $\varphi(\alpha)$ は α により生成される単項イデアル $\alpha\mathfrak{o}$ に一致する. また, $\alpha \in k^*$ に対して積公式が成り立つ. これはよく知られた事実であるが, ここで面白い証明と共に述べておく.

定理 4.3.1 (積公式) 任意の $\alpha \in k^*$ に対し, $\|\alpha\| (= \prod_{\mathfrak{p}} \|\alpha\|_{\mathfrak{p}}) = 1$.

[証明] 補題 4.1.2 より, 集合 αD の (加法的な) 測度は D の測度に $\|\alpha\|$ を掛けたものに等しい. ここで $\alpha k = k$ であるから, αD は D と同じく加法的な基本領域を与える: $V = \coprod_{\xi \in k} (\xi + \alpha D)$. 従って

$$D = \coprod_{\xi \in k} (D \cap (\xi + \alpha D)) = \coprod_{\xi \in k} (\xi + (-\xi + D) \cap \alpha D).$$

また, $V = \coprod_{\xi \in k} (\xi + D) = \coprod_{\xi \in k} (-\xi + D)$ より

$$\alpha D = \coprod_{\xi \in k} ((-\xi + D) \cap \alpha D).$$

これより αD の測度は D の測度に等しいことがわかり, $\|\alpha\| = 1$ を得る. $\square$

次に, 連続な全射準同型

$$I \ni \mathbf{a} \mapsto \|\mathbf{a}\| \in \mathbb{R}_{>0}$$

に注目する. その核は I の閉部分群であるが, これが重要な役割を演ずる. この部分群を J と書き, その一般の元 (絶対値が 1 であるようなイデール) を $\mathbf{b}$ と書く. このとき

$$1 \longrightarrow J \longrightarrow I \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow 1$$

なる完全列が得られるが, この短完全列は分解する. すなわち, I の閉部分群 T で写像 $I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ の T への制限が同型になるようなものが存在し, そのとき I は $I = T \times J$ と直積に分解される.

(あまり美しくなく, 本当に必要な訳ではないが) 便宜上, 上に述べたような T を 1 つ固定しておくことにする. そのために k の無限素点 $\mathfrak{p}_0$ を任意に固定し,

$$T := \{ \mathbf{a} \in I ; \mathbf{a}_{\mathfrak{p}_0} \in \mathbb{R}_{>0}, \mathbf{a}_{\mathfrak{p}} = 1 \ \forall \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_0 \}$$

と置く (これが I の閉部分群であることは明らか). このとき

$$T \ni \mathbf{a} \mapsto \|\mathbf{a}\| \in \mathbb{R}_{>0}$$

は (位相群としての) 同型写像で, その逆写像

$$t \mapsto \begin{cases} (t, 1, 1, \dots) & k_{\mathfrak{p}_0} = \mathbb{R} \text{ の場合} \\ (\sqrt{t}, 1, 1, \dots) & k_{\mathfrak{p}_0} = \mathbb{C} \text{ の場合} \end{cases}$$

は $\|\cdot\| : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ の右逆写像を与える ($\mathfrak{p}_0$ -成分を先頭に書いた). 以下, この逆写像による $t \in \mathbb{R}_{>0}$ の像を単に t と書くことにする. このとき任意のイデール $\mathbf{a}$ は

$$\mathbf{a} = t\mathbf{b} \quad (t \in \mathbb{R}_{>0}, \mathbf{b} \in J)$$

の形に一意的に表せる.

J の Haar 測度 $d^*\mathbf{b}$ を 1 つ決めるために, $T \cong \mathbb{R}_{>0}$ の Haar 測度 $d^*t = \frac{dt}{t}$ をとり, $d^*\mathbf{a} = d^*t \cdot d^*\mathbf{b}$ により $d^*\mathbf{b}$ を定める. このとき I 上の可積分関数 $f(\mathbf{a})$ に対して

$$\int_I f(\mathbf{a}) d^*\mathbf{a} = \int_0^\infty \left(\int_J f(t\mathbf{b}) d^*\mathbf{b} \right) \frac{dt}{t} = \int_J \left(\int_0^\infty f(t\mathbf{b}) \frac{dt}{t} \right) d^*\mathbf{b}$$

が成り立つ. なお, こうして定めた測度 $d^*\mathbf{b}$ は $\mathfrak{p}_0$ の選び方には依らない^{*22}.

さて, 積公式により $k^* \subseteq J$ が成り立つ. 以下では剰余群 J/k^* に関する基本領域を求めることを考える. 容易にわかるように, イデール群からイデール群への全射 $\varphi: I \rightarrow \mathcal{J}$ を J に制限したものは再び全射になる. また, 先に述べたように $\varphi(k^*)$ は k の単項イデール群 $\mathcal{P}$ に含まれる. 従って φ は J/k^* から k のイデール類群 $\mathcal{J}/\mathcal{P}$ への全射準同型を引き起こし, その核は $k^*J_{S_\infty}/k^* \cong J_{S_\infty}/(k^* \cap J_{S_\infty})$ となる. ただし, $J_{S_\infty} := J \cap I_{S_\infty}$ (これは I の閉部分群). ここで, $k^* \cap J_{S_\infty}$ は k の単数群 $u := \mathfrak{o}^*$ に一致するから, 完全列

$$1 \longrightarrow J_{S_\infty}/u \longrightarrow J/k^* \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{P} \longrightarrow 1$$

が得られたことになる.

以下しばらく $r := r_1 + r_2 - 1$ は正であると仮定し, J_{S_∞} の性質を調べるために, 写像

$$l: J_{S_\infty} \ni \mathbf{b} \longmapsto (\log \|\mathbf{b}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in S'_\infty} \in \mathbb{R}^r$$

を考える^{*23}. ここで $S'_\infty := S_\infty - \{\mathfrak{p}_0\}$. l は群 J_{S_∞} から加法群 $\mathbb{R}^r$ への連続な準同型である. また各 $\log \|\cdot\|_{\mathfrak{p}}: k_{\mathfrak{p}}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathfrak{p} \in S'_\infty$) は全射で, S'_∞ は S_∞ から $\mathfrak{p}_0$ を除外したものであるから, l は全射になることがわかる ($\mathfrak{p}_0$ -成分で $\prod_{\mathfrak{p} \in S_\infty} \|\mathbf{b}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}} = 1$ となるように調整すればよい).

先に述べたように, 群

$$k^* \cap J_{S_\infty} = k^* \cap I_{S_\infty} = \{\varepsilon \in k^*; \|\varepsilon\|_{\mathfrak{p}} = 1 \ \forall \mathfrak{p} \notin S_\infty\}$$

は k の単数群 u に一致する. また, $l(\zeta) = 0$ なる単数 ζ とは k における 1 の冪根に他ならない ($l(\zeta) = 0$ より $\|\zeta\|_{\mathfrak{p}} = 1 \ \forall \mathfrak{p} \in S'_\infty$ となるが, 積公式より $\prod_{\mathfrak{p} \in S_\infty} \|\zeta\|_{\mathfrak{p}} = 1$ であるから $\|\zeta\|_{\mathfrak{p}_0} = 1$ もわかる). Dirichlet の単数定理より, そのような ζ の全体は有限巡回群をなし, この群による単数群 u の剰余群は階数 r の自由アーベル群になる (その証明には単数群の像 $l(u)$ が $\mathbb{R}^r$ 内の格子になるということが用いられる).

いま, $\{\varepsilon_\nu\}_{1 \leq \nu \leq r}$ を上で述べた自由アーベル群の基底 (の代表系) とする. このとき $\{l(\varepsilon_\nu)\}_\nu$ は $\mathbb{R}^r$ の $\mathbb{R}$ 上の基底となり, 任意の $\mathbf{b} \in J_{S_\infty}$ に対して

$$l(\mathbf{b}) = \sum_{\nu=1}^r x_\nu l(\varepsilon_\nu)$$

^{*22}定理 A.1.4 を参照のこと.

^{*23}原論文の “ R -space” はミスプリント.

なる $(x_\nu)_\nu \in \mathbb{R}^r$ が一意的に存在する. P, Q をそれぞれ $\{l(\varepsilon_\nu)\}_\nu$ から定まる $\mathbb{R}^r$ 内の平行体, $\mathbb{R}^r$ 内の“単位立方体”とする:

$$P := \left\{ \sum_{\nu=1}^r x_\nu l(\varepsilon_\nu) ; 0 \leq x_\nu < 1 \right\}, \quad Q := \{ (x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in S'_\infty} ; 0 \leq x_{\mathfrak{p}} < 1 \}.$$

補題 4.3.1

$$\int_{l^{-1}(P)} d^* \mathfrak{b} = \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{\sqrt{|d|}} R.$$

ただし

$$R := \left| \det(\log \|\varepsilon_\nu\|_{\mathfrak{p}})_{\substack{1 \leq \nu \leq r \\ \mathfrak{p} \in S'_\infty}} \right|$$

は k の単数基準.

[証明] l は連続かつ固有な全射準同型であるから,

$$\frac{\int_{l^{-1}(P)} d^* \mathfrak{b}}{\int_{l^{-1}(Q)} d^* \mathfrak{b}} = \frac{\text{Vol}(P)}{\text{Vol}(Q)} = |\det(\log \|\varepsilon_\nu\|_{\mathfrak{p}})| = R$$

が成り立つ^{*24}. よって

$$\int_{l^{-1}(Q)} d^* \mathfrak{b} = \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{\sqrt{|d|}}$$

を示せばよい. さて, $l^{-1}(Q) = \{ \mathfrak{b} \in J_{S_\infty} ; 1 \leq \|\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}} < e \ \forall \mathfrak{p} \in S'_\infty \}$ であるから,

$$Q^* := \{ \mathfrak{a} \in I_{S_\infty} ; 1 \leq \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}} < e \ \forall \mathfrak{p} \in S_\infty \}$$

と置くと,

$$\int_{Q^*} d^* \mathfrak{a} = \int_J \left(\int_{t\mathfrak{b} \in Q^*} \frac{dt}{t} \right) d^* \mathfrak{b}$$

となる. ここで, $\mathfrak{b} \in J$ に対して

$$t\mathfrak{b} \in Q^* \iff \mathfrak{b} \in l^{-1}(Q) \text{ かつ } 1 \leq t\|\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}_0}\|_{\mathfrak{p}_0} < e$$

が成り立つから, 上の積分は

$$\int_{l^{-1}(Q)} \left(\int_{\|\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}_0}\|_{\mathfrak{p}_0}^{-1}}^{e\|\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}_0}\|_{\mathfrak{p}_0}^{-1}} \frac{dt}{t} \right) d^* \mathfrak{b} = \int_{l^{-1}(Q)} \left(\int_1^e \frac{dt}{t} \right) d^* \mathfrak{b} = \int_{l^{-1}(Q)} d^* \mathfrak{b}$$

に等しい. 従って

$$\int_{Q^*} d^* \mathfrak{a} = \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{\sqrt{|d|}}$$

^{*24}系 A.1.4 を参照のこと.

を示せばよい.

いま, 各 $\mathfrak{p} \in S_\infty$ に対して $Q_{\mathfrak{p}}^* := \{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \in k_{\mathfrak{p}}^*; 1 \leq \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}} < e\}$ と置いて, Q^* を $Q^* = \prod_{\mathfrak{p} \in S_\infty} Q_{\mathfrak{p}}^* \times I^{S_\infty}$ と直積に表す. このとき,

$$\int_{Q_{\mathfrak{p}}^*} d^* \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \left(\int_{-e}^{-1} + \int_1^e \right) \frac{dx}{|x|} = 2 & k_{\mathfrak{p}} = \mathbb{R} \text{ の場合}^{*25} \\ \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{e}} \frac{2 dr d\theta}{r} = 2\pi & k_{\mathfrak{p}} = \mathbb{C} \text{ の場合} \end{cases}.$$

また,

$$\int_{I^{S_\infty}} d^* \mathfrak{a}^{S_\infty} = \prod_{\mathfrak{p} \notin S_\infty} \int_{u_{\mathfrak{p}}} d^* \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \prod_{\mathfrak{p} \notin S_\infty} N_{\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}}^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{d}}.$$

故に

$$\int_{Q^*} d^* \mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p} \in S_\infty} \int_{Q_{\mathfrak{p}}^*} d^* \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \cdot \int_{I^{S_\infty}} d^* \mathfrak{a}^{S_\infty} = \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{\sqrt{|d|}}$$

と求める式を得る. □

定義 4.3.2 h を k の類数とし, イデール $\mathfrak{b}^{(1)}, \dots, \mathfrak{b}^{(h)} \in J$ をイデアル $\varphi(\mathfrak{b}^{(1)}), \dots, \varphi(\mathfrak{b}^{(h)}) \in \mathcal{J}$ がイデアル類群 $\mathcal{J}/\mathcal{P}$ の完全代表系を与えるようにとる. また, w を k に含まれる 1 の冪根の個数とし,

$$E_0 := \left\{ \mathfrak{b} \in l^{-1}(P) ; 0 \leq \arg \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}_0} < \frac{2\pi}{w} \right\}$$

と置く. 集合

$$E := \prod_{i=1}^h E_0 \mathfrak{b}^{(i)}$$

を乗法的基本領域という ($i \neq j$ ならば $E_0 \mathfrak{b}^{(i)} \cap E_0 \mathfrak{b}^{(j)} = \emptyset$ となることは明らか).

定理 4.3.2 (i)

$$J = \prod_{\alpha \in k^*} \alpha E.$$

(ii)

$$\int_E d^* \mathfrak{b} = \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2} h R}{\sqrt{|d|} w}.$$

[証明] (i) $\mathfrak{b} \in J$ とすると, $\varphi(\mathfrak{b}(\mathfrak{b}^{(i)})^{-1}) \in \mathcal{P}$ をみたとす i が一意的に存在する. 従つて $\varphi(\mathfrak{b}(\mathfrak{b}^{(i)})^{-1}) = \alpha \mathfrak{o}$ となるような $\alpha \in k^*$ が u を法として一意的に定まる. このとき $\varphi(\mathfrak{b}(\mathfrak{b}^{(i)})^{-1} \alpha^{-1}) = \mathfrak{o}$, すなわち $\mathfrak{b}(\mathfrak{b}^{(i)})^{-1} \alpha^{-1} \in J_{S_\infty}$ となる. そこで $\mathfrak{b}' := \mathfrak{b}(\mathfrak{b}^{(i)})^{-1} \alpha^{-1}$ と置くと

$$l(\mathfrak{b}') = \sum_{\nu=1}^r x_\nu l(\varepsilon_\nu) = \sum_{\nu=1}^r [x_\nu] l(\varepsilon_\nu) + \sum_{\nu=1}^r (x_\nu - [x_\nu]) l(\varepsilon_\nu)$$

^{*25} 原論文の “ $\int_{Q^*} d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ ” はミスプリント.

となるような $(x_\nu)_\nu \in \mathbb{R}^r$ が一意的に存在し,

$$l\left(\mathfrak{b}' \prod_{\nu=1}^r \varepsilon_\nu^{-[x_\nu]}\right) = \sum_{\nu=1}^r (x_\nu - [x_\nu]) l(\varepsilon_\nu) \in P,$$

すなわち $\mathfrak{b}' \prod_{\nu} \varepsilon_\nu^{-[x_\nu]} \in l^{-1}(P)$ となる. さらに 1 の冪根を掛けて $\mathfrak{p}_0$ -成分の偏角を調整することにより

$$\mathfrak{b}' \left(\prod_{\nu} \varepsilon_\nu^{-[x_\nu]} \right) \zeta^{-1} \in E_0$$

をみたす ζ が一意的に定まることがわかる ($l(\zeta) = 0$ であることに注意). よって $\alpha(\prod_{\nu} \varepsilon_\nu^{-[x_\nu]}) \zeta^{-1}$ を改めて α と書くと $\mathfrak{b} \in \alpha E_0 \mathfrak{b}^{(i)}$ を得る. また, このような $\alpha \in k^*$ の一意性は容易にわかる.

(ii) $E = \coprod_i E_0 \mathfrak{b}^{(i)}$ と $l^{-1}(P) = \coprod_{\zeta} \zeta E_0$ より

$$\int_E d^* \mathfrak{b} = h \int_{E_0} d^* \mathfrak{b} = \frac{h}{w} \int_{l^{-1}(P)} d^* \mathfrak{b}$$

で, 先の補題によりこれは

$$\frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2} h R}{\sqrt{|d|} w}$$

に等しい. □

系 4.3.1 k^* は J の (従って I の) 離散的な部分群で, 剰余群 J/k^* はコンパクトになる.

[証明] まず, 容易にわかるように E_0 は J において内点をもつ. 従って E も J において内点を持ち, k^* は離散的である. また $\mathfrak{b} \in l^{-1}(P)$ とすると, $\mathfrak{p} \notin S_\infty$ に対しては $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} \in u_{\mathfrak{p}}$ で, $\mathfrak{p} \in S'_\infty$ に対しては $1 \leq \|\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}} < e$. 従って $\|\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}_0}\|_{\mathfrak{p}_0} = (\prod_{\mathfrak{p} \in S'_\infty} \|\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}})^{-1}$ も有界となる. 故に $l^{-1}(P)$ は相対コンパクトで, E も相対コンパクトになる. よって J/k^* はコンパクトである. □

ここまで $r > 0$ だとして議論を進めていたが, $r = 0$ の場合, すなわち k が有理数体または虚 2 次体の場合にも上と同じ結果が成り立つことを示す (このときには k の単数群は有限であるから議論はかなり簡単になる).

まず, 補題 4.3.1 の証明と同様にして

$$\int_{J_{S_\infty}} d^* \mathfrak{b} = \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{\sqrt{|d|}} = \begin{cases} 2 & k = \mathbb{Q} \text{ の場合} \\ \frac{2\pi}{\sqrt{|d|}} & k \text{ が虚 2 次体の場合} \end{cases}$$

が示される (Q^* として $\{\mathfrak{a} \in k_{\mathfrak{p}_0}^* \times I^{S_\infty} ; 1 \leq \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_0}\|_{\mathfrak{p}_0} < e\}$ をとると, $\mathfrak{b} \in J$ に対して

$$t\mathfrak{b} \in Q^* \iff \mathfrak{b} \in J_{S_\infty} \text{ かつ } 1 \leq t\|\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}_0}\|_{\mathfrak{p}_0} < e$$

が成り立つ).

$h, \mathfrak{b}^{(i)}$ ならびに w は定義 4.3.2 と同じとし,

$$E_0 := \left\{ \mathfrak{b} \in J_{S_\infty} ; 0 \leq \arg \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}_0} < \frac{2\pi}{w} \right\}$$

と置いて, 定義 4.3.2 と同様に

$$E := \prod_{i=1}^h E_0 \mathfrak{b}^{(i)}$$

と定める. このとき定理 4.3.2 と同じ結論が成り立つ (証明も同様).

いま U を $k_{\mathfrak{p}_0}^*$ における 1 の近傍で, 1 以外に k の単数を含まないものとする. このとき $U \times I^{S_\infty}$ は I における 1 の近傍で,

$$(U \times I^{S_\infty}) \cap k^* = \{1\}.$$

よって k^* は I 内で (従って J 内で) 離散的である. 同様の方法で E_0 が J において内点をもつことも示せる. また

$$J_{S_\infty} = \begin{cases} \{\pm 1\} \times I^{S_\infty} & k = \mathbb{Q} \text{ の場合} \\ \mathbb{T} \times I^{S_\infty} & k \text{ が虚 2 次体の場合} \end{cases}$$

で, これらはコンパクトであるから, E は相対コンパクトになる. よって系 4.3.1 と同じ結論も成り立つ.

以下の議論においては, I の準指標のうち k^* 上自明であるようなものだけを扱う (これから先は, そのようなものを単に “準指標” と呼ぶことにする). 最後に I の準指標についていくつか注意を述べておく.

まず, I の部分群 J 上では準指標は指標になる (*i.e.* $|c(\mathfrak{b})| = 1 \quad \forall \mathfrak{b} \in J$). これは剰余群 J/k^* がコンパクトであることによる.

次に, J 上自明であるような準指標は $c(\mathfrak{a}) = \|\mathfrak{a}\|^s$ の形のものに限る. ここで s は c によって一意的に定まる複素数である. 実際, c は J 上自明であるから $c(\mathfrak{a})$ は $\|\mathfrak{a}\|$ のみによって決まり, これより $\mathbb{R}_{>0}$ から $\mathbb{C}^*$ への連続な準同型が得られる. 既に示したように, そのような写像は $t \mapsto t^s$ の形のものに限る.

各準指標 c に対し, $|c(\mathfrak{a})| = \|\mathfrak{a}\|^\sigma$ なる $\sigma \in \mathbb{R}$ が一意的に定まる. 実際, 準指標 $|c(\mathfrak{a})|$ は J 上自明であるから $|c(\mathfrak{a})| = \|\mathfrak{a}\|^s$ ($s \in \mathbb{C}$) と書けて, $|c(\mathfrak{a})| \in \mathbb{R}_{>0}$ より $s \in \mathbb{R}$ がわかる. σ を c の指数という. 準指標が指標であるためにはその指数が 0 であることが必要かつ十分である.

4.4 大域的ゼータ函数と函数等式

$f(\mathfrak{x})$ で V 上定義された複素数値函数を表し, その I への制限を $f(\mathfrak{a})$ と書く. また, § で次の 3 つの条件をみたす函数 f の類を表す:

(31) $f(\mathfrak{x}), \widehat{f}(\mathfrak{x}) \in L_1(V)$ かつ $f(\mathfrak{x})$ は連続 (i.e. $f(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{A}_1(V)$);

(32) 各 $\mathfrak{a} \in I$ と各 $\mathfrak{x} \in V$ に対して

$$\sum_{\xi \in k} f(\mathfrak{a}(\mathfrak{x} + \xi)), \quad \sum_{\xi \in k} \widehat{f}(\mathfrak{a}(\mathfrak{x} + \xi))$$

は共に収束し, かつ $\mathfrak{x} \in D$ と $\mathfrak{a} \in (I \text{ の任意のコンパクト部分集合})$ に関してこの収束は一様;

(33) $f(\mathfrak{a}) \|\mathfrak{a}\|^\sigma, \widehat{f}(\mathfrak{a}) \|\mathfrak{a}\|^\sigma \in L_1(I) \quad \forall \sigma > 1.$

(§4.3 の初めで述べたように, $f(\mathfrak{x})$ が V 上連続ならば $f(\mathfrak{a})$ は I 上連続になる.)

条件 (31) と条件 (32) により, $\mathfrak{z}$ に属する函数に対して Riemann-Roch の定理が適用できる. また, 条件 (33) は次のゼータ函数を定義するために必要になる:

定義 4.4.1 各 $f \in \mathfrak{z}$ に対し, 指数が 1 より大きいような準指標 c の函数

$$\zeta(f, c) := \int_I f(\mathfrak{a}) c(\mathfrak{a}) d^* \mathfrak{a}$$

を k のゼータ函数という.

いま, 準指標としては k^* 上自明であるようなものだけを考慮しているということに注意しておく. これは §4.3 の終わりで述べたことであり, そこで指数も定義してある.

2 つの準指標が同値であるとは, それらが J 上一致することをいう. このとき準指標の 1 つの同値類は $c(\mathfrak{a}) = c_0(\mathfrak{a}) \|\mathfrak{a}\|^s$ なる形の準指標の全体よりなる. ただし c_0 は (固定された) その類の代表元で, s は c により一意的に定まる複素数である. このような $s \in \mathbb{C}$ による径数付けによって, 局所的理論のときと同じように各同値類 C を Riemann 面と見なすことができる (cf. §2.4). 積分による定義から明らかなように, ゼータ函数は $\sigma > 1$ なる領域において正則である (cf. 補題 2.4.1). ただし σ は準指標 c の指数を表す.

定理 4.4.1 (大域的ゼータ函数の解析接続と函数等式) ゼータ函数 $\zeta(f, c)$ は準指標全体のなす領域に一価有理型に解析接続され, $c(\mathfrak{a}) = 1$ および $c(\mathfrak{a}) = \|\mathfrak{a}\|$ を除いて正則である. また, $c(\mathfrak{a}) = 1$ と $c(\mathfrak{a}) = \|\mathfrak{a}\|$ は共に 1 位の極で, 留数はそれぞれ $-\kappa f(0)$ と $\kappa \widehat{f}(0)$ である^{*26}. ここで

$$\kappa := \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2} h R}{\sqrt{|d|} w}$$

は §4.3 で求めた乗法的基本領域の体積である. さらに $\zeta(f, c)$ は函数等式

$$\zeta(f, c) = \zeta(\widehat{f}, \widehat{c})$$

をみたす. ただし $\widehat{c}(\mathfrak{a}) := c^{-1}(\mathfrak{a}) \|\mathfrak{a}\|$.

^{*26} もちろん $f(0)$ や $\widehat{f}(0)$ が 0 である場合には極ではない.

[証明] まず, $\sigma > 1$ なる c に対して

$$\zeta(f, c) = \int_I f(\mathbf{a}) c(\mathbf{a}) d^* \mathbf{a} = \int_0^\infty \left(\int_J f(t\mathbf{b}) c(t\mathbf{b}) d^* \mathbf{b} \right) \frac{dt}{t}$$

が成り立つ. いま

$$\zeta_t(f, c) := \int_J f(t\mathbf{b}) c(t\mathbf{b}) d^* \mathbf{b}$$

と置くと, 右辺の積分は任意の c および (少なくとも) 殆ど全ての t に対して絶対収束する. 実際, 仮定 (33) より $\sigma > 1$ なる c と殆ど全ての t に対してこの積分は絶対収束し,

$$|c(t\mathbf{b})| = \|t\mathbf{b}\|^\sigma = t^\sigma$$

は J 上定数である^{*27}.

Riemann-Roch の定理を使って $\zeta_t(f, c)$ の函数等式を得るというのが本質的なステップになる:

補題 4.4.1^{*28} 任意の準指標 c に対し,

$$\zeta_t(f, c) + f(0) \int_E c(t\mathbf{b}) d^* \mathbf{b} = \zeta_{1/t}(\widehat{f}, \widehat{c}) + \widehat{f}(0) \int_E \widehat{c}\left(\frac{\mathbf{b}}{t}\right) d^* \mathbf{b}.$$

[証明] $J = \coprod_{\alpha \in k^*} \alpha E$ と $d^*(\alpha\mathbf{b}) = d^*\mathbf{b}$, $c(\alpha t\mathbf{b}) = c(t\mathbf{b})$ より,

$$\zeta_t(f, c) = \sum_{\alpha \in k^*} \int_{\alpha E} f(t\mathbf{b}) c(t\mathbf{b}) d^* \mathbf{b} = \sum_{\alpha \in k^*} \int_E f(\alpha t\mathbf{b}) c(t\mathbf{b}) d^* \mathbf{b}.$$

f に関する仮定 (32) により積分と和の交換ができて, これは

$$\int_E \sum_{\alpha \in k^*} f(\alpha t\mathbf{b}) c(t\mathbf{b}) d^* \mathbf{b}$$

に等しい (和は $\mathbf{b} \in E$ (これは相対コンパクト) に関して一様収束). 従って,

$$\zeta_t(f, c) + f(0) \int_E c(t\mathbf{b}) d^* \mathbf{b} = \int_E \sum_{\xi \in k} f(\xi t\mathbf{b}) c(t\mathbf{b}) d^* \mathbf{b}.$$

Riemann-Roch の定理より, この積分は

$$\int_E \sum_{\xi \in k} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{t\mathbf{b}}\right) \frac{1}{\|t\mathbf{b}\|} c(t\mathbf{b}) d^* \mathbf{b} = \int_E \sum_{\xi \in k} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{t\mathbf{b}}\right) \widehat{c}\left(\frac{1}{t\mathbf{b}}\right) d^* \mathbf{b}$$

に等しい. 右辺の被積分函数 $\psi(\mathbf{b}) := \sum_{\xi \in k} \widehat{f}(\xi/t\mathbf{b}) \widehat{c}(1/t\mathbf{b})$ は連続かつ周期的 (ここでは $\psi(\alpha\mathbf{b}) = \psi(\mathbf{b}) \quad \forall \alpha \in k^*$ ということ) であるから, この積分は $\psi(\mathbf{b})$ が与える J/k^* 上の函数を $d^*\mathbf{b}$ が与え

^{*27}原論文の “ t exponent c ” はミスプリント.

^{*28}原論文では Lemma A.

る J/k^* の Haar 測度に関して積分したものと見なせる (cf. 補題 4.2.1). 従って, この積分は変数変換 $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}^{-1}$ の下に不変で^{*29},

$$\int_E \sum_{\xi \in k} \widehat{f}\left(\frac{\xi \mathbf{b}}{t}\right) \widehat{c}\left(\frac{\mathbf{b}}{t}\right) d^* \mathbf{b}$$

に等しい. 上の計算を逆にたどることにより, これは

$$\zeta_{1/t}(\widehat{f}, \widehat{c}) + \widehat{f}(0) \int_E \widehat{c}\left(\frac{\mathbf{b}}{t}\right) d^* \mathbf{b}$$

に一致することがわかる. □

補題 4.4.2^{*30}

$$\int_E c(t\mathbf{b}) d^* \mathbf{b} = \begin{cases} \kappa t^s & c(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|^s \text{ の場合} \\ 0 & c(\mathbf{a}) \text{ が } J \text{ 上自明でない場合} \end{cases}.$$

[証明]

$$\int_E c(t\mathbf{b}) d^* \mathbf{b} = c(t) \int_E c(\mathbf{b}) d^* \mathbf{b}$$

は, 剰余群 J/k^* 上 $c(\mathbf{b})$ により与えられる指標を積分したものである. よって, $c(\mathbf{a})$ が J 上自明であるかどうかによって積分の値は κ (E の測度) または 0 になる. 前者の場合には $c(t) = \|t\|^s = t^s$ となることより主張を得る. □

[定理の証明の続き] $\sigma > 1$ なる c に対し,

$$\zeta(f, c) = \int_0^\infty \zeta_t(f, c) \frac{dt}{t} = \int_0^1 \zeta_t(f, c) \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \zeta_t(f, c) \frac{dt}{t}$$

と積分を 2 つの部分に分ける. 第 2 の積分

$$\int_1^\infty \zeta_t(f, c) \frac{dt}{t} = \int_{\|\mathbf{a}\| \geq 1} f(\mathbf{a}) c(\mathbf{a}) d^* \mathbf{a}$$

は $\sigma > 1$ なる c に対して収束し, 従って全ての c に対して収束する ($\sigma \leq 1 < \sigma'$ かつ $\|\mathbf{a}\| \geq 1$ ならば $|c(\mathbf{a})| = \|\mathbf{a}\|^\sigma \leq \|\mathbf{a}\|^{\sigma'}$ となることによる).

次に, 補題 4.4.1 と補題 4.4.2 を使って第 1 の積分

$$\int_0^1 \zeta_t(f, c) \frac{dt}{t}$$

を区間 $(1, \infty)$ 上の積分に変換することを考える. それにより, 全ての c に対して意味をもつような $\zeta(f, c)$ の表示が得られる. すなわち:

$$\int_0^1 \zeta_t(f, c) \frac{dt}{t} = \int_0^1 \zeta_{1/t}(\widehat{f}, \widehat{c}) \frac{dt}{t} + \left\{ \int_0^1 \kappa \widehat{f}(0) \left(\frac{1}{t}\right)^{1-s} \frac{dt}{t} - \int_0^1 \kappa f(0) t^s \frac{dt}{t} \right\}.$$

^{*29}系 A.1.1 を参照のこと.

^{*30}原論文では Lemma B.

ただし, $\{\{\dots\}\}$ は $c(\mathbf{a})$ が J 上自明であるときに限って現れる項で, そのとき $c(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|^s$ とする. ここで, まだ $\sigma > 1$ と仮定していることを注意しておく. $c(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|^s$ の場合, このことは $\text{Re } s > 1$ を意味し, これは $\{\{\dots\}\}$ 内の 2 つの積分が意味をもつための条件と一致している. この積分を計算し, 積分

$$\int_0^1 \zeta_{1/t}(\hat{f}, \hat{c}) \frac{dt}{t}$$

において $t \rightarrow 1/t$ なる変数変換を行うことにより,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \zeta_t(f, c) \frac{dt}{t} &= \int_1^\infty \zeta_t(\hat{f}, \hat{c}) \frac{dt}{t} + \left\{ \left\{ \frac{\kappa \hat{f}(0)}{s-1} - \frac{\kappa f(0)}{s} \right\} \right\} \\ &= \int_{\|\mathbf{a}\| \geq 1} \hat{f}(\mathbf{a}) \hat{c}(\mathbf{a}) d^* \mathbf{a} + \left\{ \left\{ \frac{\kappa \hat{f}(0)}{s-1} - \frac{\kappa f(0)}{s} \right\} \right\} \end{aligned}$$

となることがわかる. 以上より, $\zeta(f, c)$ の積分表示

$$\zeta(f, c) = \int_{\|\mathbf{a}\| \geq 1} f(\mathbf{a}) c(\mathbf{a}) d^* \mathbf{a} + \int_{\|\mathbf{a}\| \geq 1} \hat{f}(\mathbf{a}) \hat{c}(\mathbf{a}) d^* \mathbf{a} + \left\{ \left\{ \frac{\kappa \hat{f}(0)}{s-1} - \frac{\kappa f(0)}{s} \right\} \right\}$$

が得られる. 右辺の 2 つの積分は全ての c に対して収束して正則函数を与えるから, この表示により $\zeta(f, c)$ の準指標全体のなす領域への解析接続が得られる. これから直ちに極と留数がわかる.

さて, $\hat{\hat{f}}(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ と $\hat{\hat{c}}(\mathbf{a}) = c(\mathbf{a}) = c(-\mathbf{a})$ より

$$\int_{\|\mathbf{a}\| \geq 1} \hat{\hat{f}}(\mathbf{a}) \hat{\hat{c}}(\mathbf{a}) d^* \mathbf{a} = \int_{\|\mathbf{a}\| \geq 1} f(-\mathbf{a}) c(-\mathbf{a}) d^* \mathbf{a} = \int_{\|\mathbf{a}\| \geq 1} f(\mathbf{a}) c(\mathbf{a}) d^* \mathbf{a}$$

となる. 従って

$$\int_{\|\mathbf{a}\| \geq 1} f(\mathbf{a}) c(\mathbf{a}) d^* \mathbf{a} + \int_{\|\mathbf{a}\| \geq 1} \hat{f}(\mathbf{a}) \hat{c}(\mathbf{a}) d^* \mathbf{a}$$

は変換 $(f, c) \rightarrow (\hat{f}, \hat{c})$ の下に不変である. また, $c(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|^s$ ならば $\hat{c}(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|^{1-s}$ となるから, 同じ変換の下に

$$\frac{\kappa \hat{f}(0)}{s-1} - \frac{\kappa f(0)}{s}$$

も不変である. これより函数等式

$$\zeta(f, c) = \zeta(\hat{f}, \hat{c})$$

を得る. □

4.5 古典的理論との比較

ここまで述べてきた理論が内容をもつためには, 自明でないゼータ函数の存在を示す必要がある. 以下では, 準指標の各同値類 C に対して具体的な函数 $f \in \mathfrak{z}$ でゼータ函数 $\zeta(f, c)$ が C 上自明でないようなものが存在することを示す. これらの特別なゼータ函数は本質的には古典的なゼータ

函数や L -函数になり, 先に示したゼータ函数の解析接続や函数等式から古典的な函数のそれが導かれる.

§2.5 では k が実数体の場合, 複素数体の場合, ならびに p -進体の場合を扱った. ここで扱うのは次の場合である:

k が代数体の場合!

準指標の同値類 §4.3 の最後で注意したように, 準指標の各同値類の代表として指標をとることができる. 指標について詳しく調べるために, 素点の有限集合 $S (\supseteq S_\infty)$ を任意に固定し, S の外では不分岐であるような指標について論じることにする. そのような指標とは次の 2 つの条件をみたす局所的な指標 c_p の積

$$c(\mathfrak{a}) = \prod_p c_p(\mathfrak{a}_p)$$

に他ならない:

- (i) c_p は S の外で不分岐 (*i.e.* $c_p(u_p) = \{1\} \quad \forall p \notin S$);
- (ii) 任意の $\alpha \in k^*$ に対し, $\prod_p c_p(\alpha) = 1$.

そのような指標を構成し, より具体的な形に表すために, まず $p \in S$ に対しては

$$c_p(\mathfrak{a}_p) = \tilde{c}_p(\tilde{\mathfrak{a}}_p) \|\mathfrak{a}_p\|_p^{it_p} \quad (\tilde{c}_p \in \widehat{U}_p, t_p \in \mathbb{R})$$

と書く (*cf.* 定理 2.3.1). また, 各 $p \in S - S_\infty$ に対し, $\mathfrak{f}_p = p^{n_p}$ ($n_p \geq 0$) を $\tilde{c}_p$ の導手とし, 整イデアル $\mathfrak{f}$ を

$$\mathfrak{f} := \prod_{p \in S - S_\infty} p^{n_p}$$

により定める. これを c の導手という. $p \notin S$ に対しては, 全ての局所的な指標をまとめて

$$c^*(\mathfrak{a}) := \prod_{p \notin S} c_p(\mathfrak{a}_p)$$

と置くと, この c^* はイデアル指標から得られるものと見なすことができる. すなわち, イデール群から S と素なイデール全体のなす群 $\mathcal{I}_S$ への全射準同型

$$\varphi_S : I \ni \mathfrak{a} \longmapsto \prod_{p \notin S} p^{\text{ord}_p \mathfrak{a}_p} \in \mathcal{I}_S$$

の核は I_S で, c^* は I_S 上自明であるから, $\mathcal{I}_S$ の指標 χ が (一意的に) 存在して $c^*(\mathfrak{a})$ は

$$c^*(\mathfrak{a}) = \chi(\varphi_S(\mathfrak{a}))$$

と書ける. このとき

$$c(\mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \tilde{c}_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{p}}) \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}}^{it_{\mathfrak{p}}} \cdot \chi(\varphi_S(\mathfrak{a})).$$

このような指標を構成するためには, 条件 (ii) が成り立つように $\tilde{c}_{\mathfrak{p}}$, $t_{\mathfrak{p}}$ ならびに χ を選ばなくてはならない. そのために, まず k の S -単数全体のなす群

$$u_S := k^* \cap I_S = \{\varepsilon \in k^* ; \|\varepsilon\|_{\mathfrak{p}} = 1 \ \forall \mathfrak{p} \notin S\} = \{\varepsilon \in k^* ; \varphi_S(\varepsilon) = \mathfrak{o}\}$$

に注目する. S は $m+1$ 個の素点を含むものとし, ζ_0 を k における 1 の冪根全体のなす群の生成元とする. このとき, Hasse の単数定理より, 剰余群 $u_S / \langle \zeta_0 \rangle$ は階数 m の自由アーベル群になる. $\{\varepsilon_{\nu}\}_{1 \leq \nu \leq m}$ をこの自由アーベル群の基底 (の代表系) とすると, c が u_S 上自明であるためには $c(\zeta_0) = 1$ かつ

$$c(\varepsilon_{\nu}) = 1 \quad 1 \leq \nu \leq m$$

となることが必要かつ十分である. 条件 $c(\zeta_0) = 1$ とは, $\tilde{c}_{\mathfrak{p}}$ に関する条件

$$(A) \quad \prod_{\mathfrak{p} \in S} \tilde{c}_{\mathfrak{p}}(\zeta_0) = 1$$

に他ならない ($\zeta_0 \in u_{\mathfrak{p}}$ より $c_{\mathfrak{p}}(\zeta_0) = \tilde{c}_{\mathfrak{p}}(\zeta_0)$ となることを用いた). 容易にわかるように, $\{\tilde{c}_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p} \in S}$ のうちの m 個が任意に与えられたとき, 残る 1 個を適当に定めることにより (A) が成り立つようにできる (一意性は一般には成立しない). そこで, まず $\mathfrak{p} \in S$ に対して (A) をみたすような $\tilde{c}_{\mathfrak{p}}$ をとる. このとき, 条件 $c(\varepsilon_{\nu}) = 1 \quad 1 \leq \nu \leq m$ とは $t_{\mathfrak{p}}$ に関する条件

$$\prod_{\mathfrak{p} \in S} \|\varepsilon_{\nu}\|_{\mathfrak{p}}^{it_{\mathfrak{p}}} = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \tilde{c}_{\mathfrak{p}}^{-1}(\tilde{\varepsilon}_{\nu}) \quad 1 \leq \nu \leq m$$

と同値である. このような $t_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{R}$ が存在するためには, 連立 1 次方程式

$$(B) \quad \sum_{\mathfrak{p} \in S} t_{\mathfrak{p}} \log \|\varepsilon_{\nu}\|_{\mathfrak{p}} = i \log \left(\prod_{\mathfrak{p} \in S} \tilde{c}_{\mathfrak{p}}(\tilde{\varepsilon}_{\nu}) \right) \quad 1 \leq \nu \leq m$$

が右辺の適当な値 (対数関数の多価性のこと) に対して解けることが必要かつ十分である (右辺は実数値であることに注意). よく知られているように行列 $(\log \|\varepsilon_{\nu}\|_{\mathfrak{p}})_{\nu, \mathfrak{p}}$ の階数は m であるから, (B) は常に解 $t_{\mathfrak{p}} = t_{\mathfrak{p}}^{(0)} \in \mathbb{R}$ をもつ. また, 積公式より

$$\sum_{\mathfrak{p} \in S} \log \|\varepsilon_{\nu}\|_{\mathfrak{p}} = \sum_{\mathfrak{p}} \log \|\varepsilon_{\nu}\|_{\mathfrak{p}} = 0$$

であるから, (B) の一般解は $t_{\mathfrak{p}} = t_{\mathfrak{p}}^{(0)} + t$ ($t \in \mathbb{R}$) で与えられる. ここで, 既に局所理論で述べたように, $\mathfrak{p}$ が無限素点ならば異なる $t_{\mathfrak{p}}$ は異なる指標 $c_{\mathfrak{p}} = \tilde{c}_{\mathfrak{p}} \cdot \|\cdot\|_{\mathfrak{p}}^{it_{\mathfrak{p}}}$ を与え, $\mathfrak{p}$ が有限素点ならば $2\pi / \log N_{\mathfrak{p}}$ を法として合同な $t_{\mathfrak{p}}$ は同じ指標 $c_{\mathfrak{p}}$ を与えることを注意しておく.

$\tilde{c}_p$ と t_p を定めた後に, イデアル指標 χ にはどの程度の自由度が残されているだろうか? そう多くはない. 条件 (ii) は χ に関する条件

$$(C) \quad \chi(\varphi_S(\alpha)) = \prod_{p \in S} \tilde{c}_p^{-1}(\tilde{\alpha}) \|\alpha\|_p^{-it_p} \quad \forall \alpha \in k^*$$

と同値である. さて, (C) の右辺にある k^* の指標は u_S 上自明であるから, これは $\varphi_S(k^*) \cong k^*/u_S$ の指標を与える. ところで, $\mathcal{I}_S$ を S と素なイデアル全体のなす群とすると, よく知られているように $\mathcal{I}_S$ からイデアル類群 $\mathcal{I}/\mathcal{P}$ への自然な準同型は全射であるから, 同型 $\mathcal{I}_S/(\mathcal{I}_S \cap \mathcal{P}) \cong \mathcal{I}/\mathcal{P}$ が得られる. 容易にわかるように $\mathcal{I}_S \cap \mathcal{P} \subseteq \varphi_S(k^*) \subseteq \mathcal{I}_S$ となるから,

$$h_S := [\mathcal{I}_S : \varphi_S(k^*)] = \frac{[\mathcal{I}_S : \mathcal{I}_S \cap \mathcal{P}]}{[\varphi_S(k^*) : \mathcal{I}_S \cap \mathcal{P}]} = \frac{h}{[\varphi_S(k^*) : \mathcal{I}_S \cap \mathcal{P}]} \leq h$$

と $\varphi_S(k^*)$ は $\mathcal{I}_S$ の指数有限の部分群である. よって, χ としては (C) の右辺が与える $\varphi_S(k^*)$ の指標の h_S 個ある $\mathcal{I}_S$ への拡張のうちの 1 つをとらなければならない. なお, 十分大きい S に対しては $h_S = 1$ となる. 実際, $\mathfrak{a}^{(1)}, \dots, \mathfrak{a}^{(h)} \in \mathcal{I}$ を $\mathcal{I}/\mathcal{P}$ の完全代表系とし, これらのイデアルの全ての素因子を含むように S をとると, $h_S = 1$ となることが容易に示される.

函数 $f \in \mathfrak{z}$ 上のように定めた S の外で不分岐な指標

$$c(\mathfrak{a}) = \prod_p c_p(\mathfrak{a}_p) = \prod_{p \in S} \tilde{c}_p(\tilde{\mathfrak{a}}_p) \|\mathfrak{a}_p\|_p^{it_p} \cdot \chi(\varphi_S(\mathfrak{a}))$$

に対し, なるべく簡単な函数 $f \in \mathfrak{z}$ で, c がのっている Riemann 面上自明でないゼータ函数を与えるようなものを具体的に構成することを考える. そのために, $p \in S$ に対しては §2.5 で $\rho_p(c_p \|\cdot\|_p^s)$ を計算するのに用いた函数 $f_p \in \mathfrak{z}_p$ をとり, $p \notin S$ に対しては $f_p \in \mathfrak{z}_p$ として $\mathfrak{o}_p$ の特性函数をとって

$$f(\mathfrak{x}) := \prod_p f_p(\mathfrak{x}_p)$$

と置く. この f が類 $\mathfrak{z}$ に属することは以下の計算で示される.

Fourier 変換 $\hat{f}$ 補題 3.3.3 より

$$\hat{f}(\eta) = \prod_p \hat{f}_p(\eta_p)$$

となり, さらに f が条件 $(\mathfrak{z}_1)$ (i.e. $f \in \mathfrak{V}_1(V)$) をみたすこともわかる. 実際, $p \notin S$ ならば

$$\hat{f}_p(\eta_p) = \begin{cases} N\mathfrak{d}_p^{-1/2} & \eta_p \in \mathfrak{d}_p^{-1} \text{ の場合} \\ 0 & \eta_p \notin \mathfrak{d}_p^{-1} \text{ の場合} \end{cases}$$

は殆ど全ての (i.e. $\mathfrak{d}_p = \mathfrak{o}_p$ であるような) p に対しては $f_p(\eta_p)$ と一致するから^{*31}, $\hat{f}$ は f と同じ形の函数になる.

^{*31} 原論文の "...at those $\mathfrak{x} \notin S$ where $\mathfrak{d}_p \neq 1$, $f_p(\mathfrak{x}_p)$ equals ..." はミスプリント.

ゼータ函数 $\zeta(f, c)$, $\zeta(\widehat{f}, \widehat{c})$ $|f(\mathfrak{a})| \|\mathfrak{a}\|^\sigma = \prod_{\mathfrak{p}} |f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})| \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}}^\sigma$ は局所的な函数の積であって, その殆ど全ての因子は $u_{\mathfrak{p}}$ 上恒等的に 1 であるから, 定理 3.3.1 を使って $\sigma > 1$ に対して $|f(\mathfrak{a})| \|\mathfrak{a}\|^\sigma$ が I 上可積分であることを確かめる. $\mathfrak{p} \notin S$ に対し, §2.5 で述べたように

$$\int_{k_{\mathfrak{p}}^*} |f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})| \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}}^\sigma d^* \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \frac{N\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}^{-1/2}}{1 - N\mathfrak{p}^{-\sigma}}$$

が成り立つ^{*32}. よく知られているように無限積

$$\prod_{\mathfrak{p} \notin S_{\infty}} \frac{1}{1 - N\mathfrak{p}^{-\sigma}}$$

は $\sigma > 1$ に対して収束する (この事実こそが理論全体の要となる) から, 無限積

$$\prod_{\mathfrak{p}} \int_{k_{\mathfrak{p}}^*} |f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})| \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}}^\sigma d^* \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$$

も収束し, 定理 3.3.1 が適用できる. 先に述べたように $\widehat{f}$ は f と同じ形の函数であるから, $|\widehat{f}(\mathfrak{a})| \|\mathfrak{a}\|^\sigma$ も $\sigma > 1$ に対して可積分である. 従って f は条件 (33) をみたす.

定理 3.3.1 より, $\operatorname{Re} s > 1$ で

$$\int_I f(\mathfrak{a}) c(\mathfrak{a}) \|\mathfrak{a}\|^s d^* \mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}} \int_{k_{\mathfrak{p}}^*} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}}^s d^* \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}.$$

すなわち, ゼータ函数は

$$\zeta(f, c \|\cdot\|^s) = \prod_{\mathfrak{p}} \zeta_{\mathfrak{p}}(f_{\mathfrak{p}}, c_{\mathfrak{p}} \|\cdot\|_{\mathfrak{p}}^s)$$

と局所ゼータ函数の積として表される. さて, $\mathfrak{p} \notin S$ に対して $\zeta(f, c \|\cdot\|^s)$ の局所因子は

$$\zeta_{\mathfrak{p}}(f_{\mathfrak{p}}, c_{\mathfrak{p}} \|\cdot\|_{\mathfrak{p}}^s) = \int_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}} c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}}^s d^* \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \frac{N\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}^{-1/2}}{1 - \chi(\mathfrak{p}) N\mathfrak{p}^{-s}}$$

となる ($\mathfrak{p} \notin S$ に対しては $c_{\mathfrak{p}}(\pi_{\mathfrak{p}}) = \chi(\mathfrak{p})$ であることによる). 従って, $\operatorname{Re} s > 1$ で Euler 積によって定義される古典的な L -函数

$$L(s, \chi) := \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \frac{1}{1 - \chi(\mathfrak{p}) N\mathfrak{p}^{-s}}$$

を用いて^{*33}, $\zeta(f, c \|\cdot\|^s)$ は

$$\zeta(f, c \|\cdot\|^s) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \zeta_{\mathfrak{p}}(f_{\mathfrak{p}}, c_{\mathfrak{p}} \|\cdot\|_{\mathfrak{p}}^s) \cdot \prod_{\mathfrak{p} \notin S} N\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}^{-1/2} \cdot L(s, \chi)$$

^{*32}原論文の “ $\int_{k_{\mathfrak{p}}^*} |f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})| \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}}^\sigma d\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ ” はミスプリント.

^{*33}原論文では $L(s, \chi)$ ではなく $\zeta(s, \chi)$ と書かれている.

と表せる. これより, $\zeta(f, c\|\cdot\|^s)$ は本質的には古典的な函数 $L(s, \chi)$ と変わらないことがわかる. なお, 以上の計算では定理 3.3.1 を用いて $\zeta(f, c\|\cdot\|^s)$ を局所的な積分の積に分解することにより $L(s, \chi)$ を Euler 積の形で得たが, I を I_S に関する剰余類に分割して各剰余類上での積分の和をとることによって $L(s, \chi)$ を Dirichlet 級数

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}$$

($\mathfrak{a}$ は S と素な k の整イデアル全体を渡る) の形で得ることもできる. 実際, $\mathfrak{a}^{(0)} \in I$ とするとき

$$\int_{\mathfrak{a}^{(0)} I_S} f(\mathfrak{a}) c(\mathfrak{a}) \|\mathfrak{a}\|^s d^* \mathfrak{a} = \int_{I_S} f(\mathfrak{a}^{(0)} \mathfrak{a}) c(\mathfrak{a}^{(0)} \mathfrak{a}) \|\mathfrak{a}^{(0)} \mathfrak{a}\|^s d^* \mathfrak{a}$$

であるが, $I_S = \prod_{\mathfrak{p} \in S} k_{\mathfrak{p}}^* \times u^S$ (ただし $u^S := \prod_{\mathfrak{p} \notin S} u_{\mathfrak{p}}$) 上では $d^* \mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p} \in S} d^* \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \cdot d^* \mathfrak{a}^S$ であることより, この積分は

$$\prod_{\mathfrak{p} \in S} \int_{k_{\mathfrak{p}}^*} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(0)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(0)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(0)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}}^s d^* \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \cdot \int_{u^S} \prod_{\mathfrak{p} \notin S} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(0)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(0)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(0)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}}^s d^* \mathfrak{a}^S$$

に等しい. ここで, $\mathfrak{p} \in S$ に対して

$$\int_{k_{\mathfrak{p}}^*} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(0)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(0)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(0)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}}^s d^* \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \int_{k_{\mathfrak{p}}^*} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}}^s d^* \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \zeta_{\mathfrak{p}}(f_{\mathfrak{p}}, c_{\mathfrak{p}}\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}^s).$$

また

$$\begin{aligned} & \int_{u^S} \prod_{\mathfrak{p} \notin S} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(0)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(0)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(0)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}}^s d^* \mathfrak{a}^S \\ &= \prod_{\mathfrak{p} \notin S} c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(0)}) \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(0)}\|_{\mathfrak{p}}^s \cdot \int_{u^S} \prod_{\mathfrak{p} \notin S} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(0)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) \|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}}^s d^* \mathfrak{a}^S \\ &= \frac{\chi(\varphi_S(\mathfrak{a}^{(0)}))}{N(\varphi_S(\mathfrak{a}^{(0)}))^s} \int_{u^S} \prod_{\mathfrak{p} \notin S} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(0)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) d^* \mathfrak{a}^S \end{aligned}$$

となるが, $\mathfrak{p} \notin S$ に対して $f_{\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ の特性函数であるから,

$$\int_{u^S} \prod_{\mathfrak{p} \notin S} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(0)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) d^* \mathfrak{a}^S = \begin{cases} \prod_{\mathfrak{p} \notin S} N\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}^{-1/2} & \varphi_S(\mathfrak{a}^{(0)}) \subseteq \mathfrak{o} \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}.$$

以上より

$$\zeta(f, c\|\cdot\|^s) = \sum_{\mathfrak{a}^{(0)} \in I/I_S} \int_{\mathfrak{a}^{(0)} I_S} f(\mathfrak{a}) c(\mathfrak{a}) \|\mathfrak{a}\|^s d^* \mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \zeta_{\mathfrak{p}}(f_{\mathfrak{p}}, c_{\mathfrak{p}}\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}^s) \cdot \prod_{\mathfrak{p} \notin S} N\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}^{-1/2} \cdot \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}$$

となり, 求める $L(s, \chi)$ の Dirichlet 級数表示を得る.

また, $\widehat{f}$ のゼータ函数についても同様に考えることにより, $\operatorname{Re} s < 0$ で

$$\zeta(\widehat{f}, \widehat{c\|\cdot\|^s}) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \zeta_{\mathfrak{p}}(\widehat{f}_{\mathfrak{p}}, \widehat{c_{\mathfrak{p}}\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}^s}) \cdot \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \chi(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}) N\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}^{-s} \cdot L(1-s, \overline{\chi})$$

となることがわかる^{*34}.

$L(s, \chi)$ の解析接続や函数等式について述べる前に, f が条件 (3₂) をみたすこと, すなわち

$$\sum_{\xi \in k} f(\mathfrak{a}(\mathfrak{x} + \xi)), \quad \sum_{\xi \in k} \widehat{f}(\mathfrak{a}(\mathfrak{x} + \xi))$$

が $\mathfrak{x} \in D$ および $\mathfrak{a} \in B$ (I の任意のコンパクトな部分集合) に関して一様に収束することを確認しておく. ここでは前者の級数が一様収束することを示す (後者の級数の一様収束性も全く同様に示される). まず, $B \subseteq I$ がコンパクトであることより, 各 $\mathfrak{p} \notin S_\infty$ に対して

$$\text{ord}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \leq r_{\mathfrak{p}} \quad \forall \mathfrak{a} \in B$$

となるような $r_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$ が存在することがわかる. ここで殆ど全ての $\mathfrak{p}$ に対して $r_{\mathfrak{p}} = 0$ とできる (下からの評価もできるが, ここでは必要ない). また, 各 $\mathfrak{p} \notin S_\infty$ に対し, $f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}})$ の台がコンパクトであることより

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} \in k_{\mathfrak{p}}, \quad \text{ord}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} < R_{\mathfrak{p}} \implies f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}}) = 0$$

となるような $R_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$ が存在する. ここでも殆ど全ての $\mathfrak{p}$ に対して $R_{\mathfrak{p}} = 0$ とできる. そこで $e_{\mathfrak{p}} := \min\{R_{\mathfrak{p}} - r_{\mathfrak{p}}, 0\} \in \mathbb{Z}$ とすると, 殆ど全ての $\mathfrak{p}$ に対して $e_{\mathfrak{p}} = 0$ であるから, (分数) イデアル $\mathfrak{m} := \prod_{\mathfrak{p} \notin S_\infty} \mathfrak{p}^{e_{\mathfrak{p}}}$ が定義できる^{*35}. このとき

$$f(\mathfrak{a}(\mathfrak{x} + \xi)) = 0 \quad \forall \xi \notin \mathfrak{m}$$

が成り立つ. 実際, $\xi \notin \mathfrak{m}$ とすると, $\text{ord}_{\mathfrak{p}} \xi < e_{\mathfrak{p}}$ となるような $\mathfrak{p} \notin S_\infty$ が存在し, この $\mathfrak{p}$ に対して

$$\text{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} + \xi)) = \text{ord}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} + \text{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} + \xi) \leq r_{\mathfrak{p}} + \text{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} + \xi)$$

が成り立つ. ここで, $\mathfrak{x} \in D \subseteq V_{S_\infty}$ より $\text{ord}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} \geq 0$ で, このことと $\text{ord}_{\mathfrak{p}} \xi < e_{\mathfrak{p}} \leq 0$ より $\text{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} + \xi) = \text{ord}_{\mathfrak{p}} \xi < e_{\mathfrak{p}}$ がわかるから,

$$\text{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} + \xi)) < r_{\mathfrak{p}} + e_{\mathfrak{p}} \leq R_{\mathfrak{p}}.$$

従って $f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} + \xi)) = 0$ となり, $f(\mathfrak{a}(\mathfrak{x} + \xi)) = 0$ を得る. 以上より

$$\sum_{\xi \in k} f(\mathfrak{a}(\mathfrak{x} + \xi)) = \sum_{\xi \in \mathfrak{m}} f(\mathfrak{a}(\mathfrak{x} + \xi))$$

となるが, ($\mathfrak{m}$ の V^∞ への埋め込みを考えることにより) これは $\mathbb{R}^n$ 内のある格子上の点に渡る和と見なすことができる. $\mathfrak{p} \in S_\infty$ に対する $f_{\mathfrak{p}}$ の形を見ると ($\prod_{\mathfrak{p} \notin S_\infty} f_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} + \xi))$ は有界なので無視してよい), $\xi \in V^\infty$ が原点から遠ざかるとき $f(\mathfrak{a}(\mathfrak{x} + \xi))$ は指数函数のオーダーで 0 に収束することがわかるから, 上の和は収束し, B および D の (相対) コンパクト性により収束の一様性がわかる.

^{*34} 原論文の “ $\zeta(\widehat{f}, c||^s) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \zeta(\widehat{f}_{\mathfrak{p}}, c_{\mathfrak{p}}||_{\mathfrak{p}}^s) \cdots$ ” はミスプリント.

^{*35} 原論文ではこのイデアルを $\mathfrak{a}$ と表しているが, $\mathfrak{a}$ は既に別の意味で使われているので $\mathfrak{m}$ とした.

$L(s, \chi)$ の解析接続と函数等式 既に示してある局所的小よび大域的ゼータ函数の解析接続により, L -函数 $L(s, \chi)$ は全 s -平面に解析接続され, 函数等式

$$\zeta(f, c) = \zeta(\widehat{f}, \widehat{c}), \quad \zeta_p(f_p, c_p) = \rho_p(c_p) \zeta_p(\widehat{f}_p, \widehat{c}_p)$$

により, $L(s, \chi)$ の函数等式

$$L(1-s, \overline{\chi}) = \prod_{p \in S} \rho_p(\widehat{c}_p \|\cdot\|_p^{s+it_p}) \cdot \prod_{p \notin S} N \mathfrak{d}_p^{s-1/2} \overline{\chi}(\mathfrak{d}_p) \cdot L(s, \chi)$$

が直ちに得られる. ここで ρ_p ($p \in S$) は §2.5 で求めた局所函数である. また, $\widehat{c}_p$ と t_p の意味やイデアル指標 χ との関係は先に述べた通りである^{*36}.

イデール指標から構成されたイデール指標 χ とは, “新しい形のゼータ函数” を定義するために Hecke が導入した指標に他ならない. $L(s, \chi)$ がそのゼータ函数であり, 上で述べた函数等式は Hecke が示したものと一致する^{*37}.

^{*36}原論文の “ $\widehat{c}_p$ and t_p ” はミスプリント.

^{*37}原論文では, このあとに “A Few Comments on Recent Related Literature [Added January 1967]” として, 論文提出後の発展に関する記述がある.

参考文献

- [1] Artin, E. and Whaples, G. (1945). Axiomatic characterization of fields by the product formula for valuations. *Bull. Am. math. Soc.* **51**, 469–492.
- [2] Cartan, H. and Godement, R. (1947). Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts. *Annls. scient. Ec. norm. sup., Paris* (3), **64**, 79–99.
- [3] Chevalley, C. (1940). La théorie du corps de classes. *Ann. Math.* **41**, 394–418.
- [4] Hecke, E. Über eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. *Math. Z.* **1** (1918), 357–376; **4** (1920), 11–21. Reprinted in “Mathematische Werke”, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1959.
- [5] Matchett, M. *Thesis*, Indiana University (1946), unpublished.

付録 A 位相群論からの準備

G を局所コンパクトアーベル群とする^{*38}.

A.1 Haar 測度

X を局所コンパクトな Hausdorff 空間とすると、 X のコンパクトな部分集合を全て含むような σ -加法族 $\mathfrak{B}$ 上で定義された測度 $\mu : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ が正則であるとは次が成り立つことをいう:

- (i) コンパクト集合 K に対し, $\mu(K) < \infty$;
- (ii) 開集合 $U \in \mathfrak{B}$ に対し, $\mu(U) = \sup\{\mu(K) ; K \text{ はコンパクト, } K \subseteq U\}$;
- (iii) $M \in \mathfrak{B}$ に対し, $\mu(M) = \inf\{\mu(U) ; U \in \mathfrak{B} \text{ は開集合, } M \subseteq U\}$.

X 上の複素数値連続関数で台がコンパクトであるようなものの全体のなす複素ベクトル空間を $L(X)$ で表す. この空間上の線型汎関数 $\Phi : L(X) \rightarrow \mathbb{C}$ が正であるとは次が成り立つことをいう:

$$f \in L(X), \quad f(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall x \in X \implies \Phi(f) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

定理 A.1.1 X を局所コンパクトな Hausdorff 空間とすると:

- (i) X の正則な測度と $L(X)$ 上の正の線型汎関数とは

$$\mu \longleftrightarrow \left(f \mapsto \int_X f(x) d\mu(x) \right)$$

により 1 対 1 に対応する.

- (ii) μ を X の正則な測度とすると、各 $1 \leq p < \infty$ に対して $L(X)$ の $L_p(X, \mu)$ での像是 $L_p(X, \mu)$ の中で稠密である.

G の **Haar 測度**とは G の 0 でない正則な測度 μ で次をみたすものをいう:

$$\mu(aM) = \mu(M) \quad (i.e. \, d\mu(ax) = d\mu(x)) \quad \forall a \in G.$$

補題 A.1.1 μ を G の Haar 測度とすると、 G の任意の開部分集合 $U \neq \emptyset$ に対し, $\mu(U) > 0$.

例 A.1.1 (i) 加法群 $\mathbb{R}^n$ において通常の Lebesgue 測度は Haar 測度を与える.

- (ii) G を離散的な位相アーベル群とすると、数え上げ測度

$$\mu(M) := \#M \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

は G の Haar 測度を与える.

^{*38} 位相群は分離的であるものだけを考える.

定理 A.1.2 (Haar 測度の存在と一意性) G の Haar 測度は存在する. また μ と μ' を G の Haar 測度とすると, $\mu' = c\mu$ なる定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在する.

上の定理より, 各 $1 \leq p < \infty$ に対して空間 $L_p(G, \mu)$ は G の Haar 測度 μ の選び方に依らずに定まる (ただしノルムは定数倍だけ異なる) ことがわかる. よって $L_p(G, \mu)$ を単に $L_p(G)$ で表す.

系 A.1.1 μ を G の Haar 測度とすると,

$$\mu(M^{-1}) = \mu(M) \quad (i.e. \ d\mu(x^{-1}) = d\mu(x)).$$

系 A.1.2 K を G のコンパクトな部分集合で, G の空でない開部分集合を含むものとする. このとき, 任意の $c \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して G の Haar 測度 μ で $\mu(K) = c$ となるようなものがただ 1 つ存在する.

系 A.1.3 H を G の開部分群とし, μ' をその Haar 測度とする. このとき, G の Haar 測度 μ で H 上 $\mu = \mu'$ となるようなものがただ 1 つ存在する.

空間 $L(G)$ 上の 0 でない正の線型汎函数 $\Phi : L(G) \rightarrow \mathbb{C}$ が **Haar 汎函数** であるとは次が成り立つことをいう:

$$\Phi(f_a) = \Phi(f) \quad \forall a \in G.$$

ただし $f_a(x) := f(ax)$.

定理 A.1.3 G の Haar 測度と $L(G)$ 上の Haar 汎函数とは

$$\mu \longleftrightarrow \left(f \mapsto \int_G f(x) d\mu(x) \right)$$

により 1 対 1 に対応する.

系 A.1.4 $\tilde{G}$ を局所コンパクトアーベル群, $\tilde{\mu}$ を $\tilde{G}$ の Haar 測度, $\varphi : \tilde{G} \rightarrow G$ を連続かつ固有な全射準同型とすると, 定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して次が成り立つ:

$$\tilde{\mu}(\varphi^{-1}(M)) = c\mu(M).$$

定理 A.1.4 H を G の閉部分群とすると, $G, H, G/H$ の Haar 測度 $\mu_G, \mu_H, \mu_{G/H}$ のうち 2 つが与えられれば, 残る 1 つで等式

$$\int_G f(x) d\mu_G(x) = \int_{G/H} \left(\int_H f(xy) d\mu_H(y) \right) d\mu_{G/H}(\dot{x}) \quad \forall f \in L_1(G)$$

を成立させるものがただ 1 つ存在する.

A.2 指標群

G から絶対値が 1 の複素数全体のなす群 $\mathbb{T}$ への連続な準同型を G の指標という. G の指標の全体は通常の乗法に関してアーベル群をなし, 恒等的に 1 であるような指標 (単位指標という) がその単位元となる. この群を G の指標群といい $\widehat{G}$ または $G^\wedge$ で表す. いまコンパクト集合 $K \subseteq G$ と開集合 $U \subseteq \mathbb{T}$ に対して $W(K, U) \subseteq \widehat{G}$ を

$$W(K, U) := \{ \chi \in \widehat{G} ; \chi(K) \subseteq U \}$$

により定めると, このような $W(K, U)$ の全体を準開基とする位相 (コンパクト開位相) を入れることによって $\widehat{G}$ は局所コンパクト群になり,

$$\{ W(K, U) ; K \subseteq G \text{ はコンパクト, } U \subseteq \mathbb{T} \text{ は } 1 \text{ の開近傍} \}$$

は $\widehat{G}$ における単位元の基本近傍系となる.

例 A.2.1 (i) G がコンパクトならば $\widehat{G}$ は離散的である. 実際, $\mathbb{T}$ における 1 の開近傍 $U := \{ z \in \mathbb{T} ; |z - 1| < 1 \}$ は $\{1\}$ 以外に $\mathbb{T}$ の部分群を含まないから $W(G, U)$ は単位指標のみを含む.

(ii) G が離散的ならば, $\widehat{G}$ は自然にコンパクト群 $\mathbb{T}^G = \{ \varphi : G \rightarrow \mathbb{T} \}$ (位相は直積位相) の閉部分群と見なせるからコンパクトである.

定理 A.2.1 (Pontrjagin の双対定理) G から $\widehat{\widehat{G}} := (G^\wedge)^\wedge$ への自然な準同型

$$x \mapsto (\chi \mapsto \chi(x))$$

は位相群としての同型を与える.

G の部分群 H に対し,

$$H^\perp := \{ \chi \in \widehat{G} ; \chi(x) = 1 \quad \forall x \in H \}$$

は $\widehat{G}$ の閉部分群になる. これを H の零化群という.

定理 A.2.2 H を G の閉部分群とすると, 次の自然な位相群としての同型が成り立つ:

$$\widehat{H} \cong \widehat{G}/H^\perp, \quad (G/H)^\wedge \cong H^\perp.$$

Pontrjagin の双対定理により $\widehat{\widehat{G}} = G$ と見なすと, $\widehat{G}$ の部分群 Y の零化群は

$$Y^\perp := \{ x \in G ; \chi(x) = 1 \quad \forall \chi \in Y \}$$

となる. これは G の閉部分群である.

定理 A.2.3 (i) H を G の部分群とするととき, $(H^\perp)^\perp = \overline{H}$.

(ii) Y を $\widehat{G}$ の部分群とするととき, $(Y^\perp)^\perp = \overline{Y}$.

系 A.2.1 G の閉部分群と $\widehat{G}$ の閉部分群は

$$G \supseteq H = Y^\perp \longleftrightarrow Y = H^\perp \subseteq \widehat{G}$$

により 1 対 1 に対応する.

定理 A.2.4 μ を G の Haar 測度とするととき, $\chi \in \widehat{G}$ と G のコンパクトな部分群 H に対し,

$$\int_H \chi(x) d\mu(x) = \begin{cases} \mu(H) & \chi \in H^\perp \text{ の場合} \\ 0 & \chi \notin H^\perp \text{ の場合} \end{cases}.$$

A.3 Fourier 解析

G の Haar 測度 μ を 1 つ固定し, $f(x) \in L_1(G)$ の μ に関する **Fourier 変換** $\widehat{f}(\chi)$ ($\chi \in \widehat{G}$) を次により定める:

$$\widehat{f}(\chi) := \int_G f(x) \overline{\chi}(x) d\mu(x).$$

同様に, $\widehat{G}$ の Haar 測度 ν を 1 つ固定し, Pontrjagin の双対定理により $\widehat{\widehat{G}} = G$ と見なして, $g(\chi) \in L_1(\widehat{G})$ の ν に関する Fourier 変換 $\widehat{g}(x)$ ($x \in G$) を次により定める:

$$\widehat{g}(x) := \int_{\widehat{G}} g(\chi) \overline{\chi}(x) d\nu(\chi).$$

また, 次の 2 つの条件をみたす連続関数 $f(x)$ ($x \in G$) 全体のなす複素線型空間を $\mathfrak{V}_1(G)$ で表す:

$$f(x) \in L_1(G), \quad \widehat{f}(\chi) \in L_1(\widehat{G}).$$

定理 A.3.1 (反転公式) 定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して次が成り立つ:

$$f(x) = c \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \chi(x) d\nu(\chi) = c \widehat{\widehat{f}}(x^{-1}) \quad \forall f \in \mathfrak{V}_1(G).$$

測度 ν (または μ) を適当に選ぶことにより, 上の定理において $c = 1$ となるようにすることができる. このとき μ と ν は互いに双対的であるという.

例 A.3.1 G はコンパクトであるものとし, μ を $\mu(G) = 1$ なる G の Haar 測度とする. また ν を $\widehat{G}$ (これは離散的) の数え上げ測度とする. いま $f_0(x)$ ($x \in G$) を恒等的に 1 であるような関数とすると

$$\widehat{f_0}(\chi) = \int_G \overline{\chi}(x) d\mu(x) = \begin{cases} 1 & \chi = 1 \text{ の場合} \\ 0 & \chi \neq 1 \text{ の場合} \end{cases}$$

となるから,

$$\widehat{f_0}(x) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f_0}(\chi) \overline{\chi}(x) = 1 \quad \forall x \in G.$$

従って上の定理の定数 c は 1 となり, μ と ν は互いに双対的である. このとき反転公式は

$$f(x) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \chi(x)$$

となる. ここで $f(x)$ は $\sum_{\chi \in \widehat{G}} |\widehat{f}(\chi)| < \infty$ なる G 上の連続関数である.

付録 B Hecke の指標と L -函数

記号や仮定は §4 の通りとする. また, k の無限素点全体のなす集合 S_∞ を実の素点全体のなす集合 $S_\mathbb{R}$ と虚の素点全体のなす集合 $S_\mathbb{C}$ とに分割し, 各 $\mathfrak{p} \in S_\mathbb{R}$ (resp. $\mathfrak{p} \in S_\mathbb{C}$) に対して局所体の同型 $k_\mathfrak{p} \ni \mathfrak{x}_\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{x}_\mathfrak{p}^{(\mathfrak{p})} \in \mathbb{R}$ (resp. $k_\mathfrak{p} \ni \mathfrak{x}_\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{x}_\mathfrak{p}^{(\mathfrak{p})} \in \mathbb{C}$) を固定しておく.

B.1 Hecke の指標

$c(\mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{p}} c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ を (k^* 上は自明であるような) イデール指標, $\mathfrak{f} = \prod_{\mathfrak{p} \notin S_\infty} \mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}$ をその導手とし, S を無限素点全体と $\mathfrak{f}$ の素因子全体とからなる集合とする. このとき, §4.5 で述べたように, c は $\mathcal{I}_S$ の指標 χ を用いて

$$c(\mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) \cdot \chi(\varphi_S(\mathfrak{a}))$$

と表すことができる. また, 各 $\mathfrak{p} \in S_\mathbb{R}$ (resp. $\mathfrak{p} \in S_\mathbb{C}$) に対し, $c_{\mathfrak{p}}$ は $n_{\mathfrak{p}} \in \{0, 1\}$ と $t_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{R}$ (resp. $n_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$ と $t_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{R}$) を用いて

$$c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) = (\operatorname{sgn} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(\mathfrak{p})})^{n_{\mathfrak{p}}} |\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(\mathfrak{p})}|^{it_{\mathfrak{p}}} \quad \left(\text{resp. } c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) = \left(\frac{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(\mathfrak{p})}}{|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(\mathfrak{p})}|} \right)^{n_{\mathfrak{p}}} |\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(\mathfrak{p})}|^{2it_{\mathfrak{p}}} \right)$$

と表すことができる.

さて, c は k^* 上自明であるから, 任意の $\alpha \in k^*$ に対して

$$\chi(\varphi_S(\alpha)) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} c_{\mathfrak{p}}(\alpha)^{-1}$$

をみtas. 従って, 特に $\alpha \in k^*$ が総正 (*i.e.* $\alpha^{(\mathfrak{p})} > 0 \quad \forall \mathfrak{p} \in S_\mathbb{R}$) で合同条件

$$\alpha \in 1 + \mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}} \quad \forall \mathfrak{p} \in S - S_\infty$$

をみtasときには,

$$\operatorname{sgn} \alpha^{(\mathfrak{p})} = 1 \quad \forall \mathfrak{p} \in S_\mathbb{R}, \quad c_{\mathfrak{p}}(\alpha) = 1 \quad \forall \mathfrak{p} \in S - S_\infty, \quad \varphi_S(\alpha) = \alpha \mathfrak{o}$$

となるから, 次が成り立つ:

$$\chi(\alpha \mathfrak{o}) = \prod_{\mathfrak{p} \in S_\mathbb{R}} |\alpha^{(\mathfrak{p})}|^{-it_{\mathfrak{p}}} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \in S_\mathbb{C}} \left(\frac{\alpha^{(\mathfrak{p})}}{|\alpha^{(\mathfrak{p})}|} \right)^{-n_{\mathfrak{p}}} |\alpha^{(\mathfrak{p})}|^{-2it_{\mathfrak{p}}}.$$

ここまでの議論ではイデール群の指標 c から話を始めてイデール指標 χ を得たが, 以下に述べるように χ から c を構成することもできる:

$\mathfrak{m}$ を k の 0 でない整イデール, S' を無限素点全体と $\mathfrak{m}$ の素因子全体とからなる集合とし, S' と素なイデール全体のなす群 (resp. 整イデール全体のなす半群) を $\mathcal{I}_{S'}$ (resp. $\mathcal{I}_{S'}^+$) で表す.

いま, 次の 2 つの条件をみたす写像 $\chi: \mathcal{I}_{S'}^+ \rightarrow \mathbb{T}$ が与えられたとする:

$$(i) \chi(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) = \chi(\mathfrak{a}_1) \chi(\mathfrak{a}_2) \quad \forall \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in \mathcal{I}_{S'}^+;$$

(ii) $n_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$ ($\mathfrak{p} \in S_{\mathbb{C}}$) と $t_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{R}$ ($\mathfrak{p} \in S_{\infty}$) が存在して: $\alpha \in 1 + \mathfrak{m}, \neq 0$ が総正ならば

$$(*) \quad \chi(\alpha \mathfrak{o}) = \prod_{\mathfrak{p} \in S_{\mathbb{R}}} |\alpha^{(\mathfrak{p})}|^{-it_{\mathfrak{p}}} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \in S_{\mathbb{C}}} \left(\frac{\alpha^{(\mathfrak{p})}}{|\alpha^{(\mathfrak{p})}|} \right)^{-n_{\mathfrak{p}}} |\alpha^{(\mathfrak{p})}|^{-2it_{\mathfrak{p}}}.$$

このような χ を $\mathfrak{m}$ を法とする Hecke の量指標という ($n_{\mathfrak{p}}$ や $t_{\mathfrak{p}}$ が全て 0 の場合には類指標という). 容易にわかるように, χ は群 $\mathcal{I}_{S'}$ の指標に一意的に拡張される. また

$$U_{\mathfrak{m}} := \{ \mathfrak{a} \in I; \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(\mathfrak{p})} > 0 \quad \forall \mathfrak{p} \in S_{\mathbb{R}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \in 1 + \mathfrak{p}^{\text{ord}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{m}} \quad \forall \mathfrak{p} \in S' - S_{\infty} \}$$

と置くと, これは I の開部分群で, 任意の $\alpha \in k^* \cap U_{\mathfrak{m}}$ に対して $(*)$ が成り立つ (α が総正な $\beta, \gamma \in 1 + \mathfrak{m}, \neq 0$ によつて $\alpha = \beta/\gamma$ と表せることによる). そこで群 $U_{\mathfrak{m}}$ の連続な指標 c を

$$c(\mathfrak{a}) := \prod_{\mathfrak{p} \in S_{\mathbb{R}}} |\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(\mathfrak{p})}|^{it_{\mathfrak{p}}} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \in S_{\mathbb{C}}} \left(\frac{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(\mathfrak{p})}}{|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(\mathfrak{p})}|} \right)^{n_{\mathfrak{p}}} |\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(\mathfrak{p})}|^{2it_{\mathfrak{p}}} \cdot \chi(\varphi(\mathfrak{a}))$$

によつて定める ($\mathfrak{a} \in U_{\mathfrak{m}}$ ならば $\varphi(\mathfrak{a}) \in \mathcal{I}_{S'}$ となるから, $\chi(\varphi(\mathfrak{a}))$ は意味をもつ) と, 任意の $\alpha \in k^* \cap U_{\mathfrak{m}}$ に対して $c(\alpha \mathfrak{a}) = c(\mathfrak{a})$ が成り立ち, c は剰余群 $U_{\mathfrak{m}}/(k^* \cap U_{\mathfrak{m}})$ の指標を与える. ところで, $U_{\mathfrak{m}}$ が I の開部分群であることより, 自然な準同型 $U_{\mathfrak{m}} \rightarrow I/k^*$ は (連続な) 開写像となる. また, 近似定理より

$$\forall \mathfrak{a} \in I \quad \exists \alpha \in k^* \quad \text{s.t.} \quad \alpha \mathfrak{a} \in U_{\mathfrak{m}}$$

が成り立つから, この写像は全射である. 従つて $U_{\mathfrak{m}}/(k^* \cap U_{\mathfrak{m}})$ は I/k^* と位相群として同型になり, c は I の (正確には I/k^* の) 指標に一意的に拡張されることがわかる.

こうして得られた I の指標 c を局所指標の積として $c(\mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{p}} c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ と表すとき, $U_{\mathfrak{m}}$ や c の定義より次が成り立つことがわかる:

$$(i) \mathfrak{p} \in S' - S_{\infty} \text{ ならば, } 1 + \mathfrak{p}^{\text{ord}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{m}} \subseteq U_{\mathfrak{m}} \text{ かつ } c_{\mathfrak{p}}(1 + \mathfrak{p}^{\text{ord}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{m}}) = \{1\};$$

$$(ii) \mathfrak{p} \notin S' \text{ ならば, } k_{\mathfrak{p}}^* \subseteq U_{\mathfrak{m}} \text{ かつ } c_{\mathfrak{p}}(u_{\mathfrak{p}}) = \{1\}.$$

従つて c の導手 $\mathfrak{f}$ は $\mathfrak{m}$ を割り切り, S を無限素点全体と $\mathfrak{f}$ の素因子全体とからなる集合とすると $S' \supseteq S$ が成り立つ. また, c から得られるイデール指標は $\mathcal{I}_{S'}$ の指標 χ を $\mathcal{I}_S$ 上まで拡張したものになっている. 整イデール $\mathfrak{f}$ を χ の導手といい, $\mathfrak{m} = \mathfrak{f}$ であるとき χ は原始的であるという.

以上の議論により, (k^* 上は自明であるような) イデール指標は原始的なイデール指標と 1 対 1 に対応することがわかる. また, イデール指標 c の位数が有限であるためには, 対応するイデール指標 χ が類指標であることが必要かつ十分である.

B.2 L -函数の函数等式

χ を $\mathfrak{f}$ を法とする原始的な量指標とし, S を無限素点全体と $\mathfrak{f}$ の素因子全体とからなる集合とする. $c(\mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{p}} c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ を χ に対応するイデール指標とし, $\mathfrak{p} \in S$ に対して $\tilde{c}_{\mathfrak{p}}, n_{\mathfrak{p}}, t_{\mathfrak{p}}$ を §4.5 や §B.1 のように定める. このとき, §4.5 で述べたように, L -函数 $L(s, \chi)$ は函数等式

$$L(1-s, \bar{\chi}) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \rho_{\mathfrak{p}}(\tilde{c}_{\mathfrak{p}} \|\cdot\|_{\mathfrak{p}}^{s+it_{\mathfrak{p}}}) \cdot \prod_{\mathfrak{p} \notin S} N \mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}^{s-1/2} \bar{\chi}(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}) \cdot L(s, \chi)$$

をみtas. 以下では, この函数等式をより具体的に書き直すことを考える.

まず $\mathfrak{p} \in S_{\infty}$ に対しては

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \quad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)$$

と置くと

$$\rho_{\mathfrak{p}}(\tilde{c}_{\mathfrak{p}} \|\cdot\|_{\mathfrak{p}}^{s+it_{\mathfrak{p}}}) = \begin{cases} \frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(s+it_{\mathfrak{p}}+n_{\mathfrak{p}})}{i^{n_{\mathfrak{p}}} \Gamma_{\mathbb{R}}(1-s-it_{\mathfrak{p}}+n_{\mathfrak{p}})} & \mathfrak{p} \in S_{\mathbb{R}} \text{ の場合} \\ \frac{\Gamma_{\mathbb{C}}\left(s+it_{\mathfrak{p}}+\frac{|n_{\mathfrak{p}}|}{2}\right)}{i^{|n_{\mathfrak{p}}|} \Gamma_{\mathbb{C}}\left(1-s-it_{\mathfrak{p}}+\frac{|n_{\mathfrak{p}}|}{2}\right)} & \mathfrak{p} \in S_{\mathbb{C}} \text{ の場合} \end{cases}$$

となっている. また $\mathfrak{p} \in S - S_{\infty}$ ならば

$$\rho_{\mathfrak{p}}(\tilde{c}_{\mathfrak{p}} \|\cdot\|_{\mathfrak{p}}^{s+it_{\mathfrak{p}}}) = N(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}})^{s+it_{\mathfrak{p}}-1/2} \rho_{\mathfrak{p},0}(\tilde{c}_{\mathfrak{p}}).$$

ここで $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}$ は $\tilde{c}_{\mathfrak{p}}$ の導手で,

$$\rho_{\mathfrak{p},0}(\tilde{c}_{\mathfrak{p}}) = N \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}^{-1/2} \sum_{\varepsilon_{\mathfrak{p}} \in u_{\mathfrak{p}}/(1+\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}})} \tilde{c}_{\mathfrak{p}}(\varepsilon_{\mathfrak{p}}) \exp\left(2\pi i \Lambda_{\mathfrak{p}}\left(\varepsilon_{\mathfrak{p}} \pi_{\mathfrak{p}}^{-\text{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}})}\right)\right)$$

は絶対値が 1 であるような定数である. 従って函数 $\hat{L}(s, \chi)$ を

$$\hat{L}(s, \chi) := |d|^{s/2} N \mathfrak{f}^{s/2} \prod_{\mathfrak{p} \in S_{\mathbb{R}}} \Gamma_{\mathbb{R}}(s+it_{\mathfrak{p}}+n_{\mathfrak{p}}) \cdot \prod_{\mathfrak{p} \in S_{\mathbb{C}}} \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s+it_{\mathfrak{p}}+\frac{|n_{\mathfrak{p}}|}{2}\right) \cdot L(s, \chi)$$

により定めると, 上の函数等式は

$$\hat{L}(s, \chi) = W(\chi) \hat{L}(1-s, \bar{\chi})$$

と書き直せる. ただし

$$W(\chi) := i^{\sum_{\mathfrak{p} \in S_{\infty}} |n_{\mathfrak{p}}|} \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \chi(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}) \cdot \prod_{\mathfrak{p} \in S - S_{\infty}} \overline{N(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}})^{it_{\mathfrak{p}}} \rho_{\mathfrak{p},0}(\tilde{c}_{\mathfrak{p}})}$$

は絶対値が 1 であるような定数である. なお, $\mathfrak{p} \in S - S_\infty$ に対し, $t_{\mathfrak{p}}$ の定義より

$$N(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}})^{it_{\mathfrak{p}}} = N\mathfrak{p}^{it_{\mathfrak{p}} \text{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}})} = c_{\mathfrak{p}}(\pi_{\mathfrak{p}}^{-\text{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}})})$$

が成り立つことがわかる. また, $\text{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}})$ は $\text{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d} \mathfrak{f})$ に一致し, $\tilde{c}_{\mathfrak{p}}$ は $c_{\mathfrak{p}}$ の $u_{\mathfrak{p}}$ への制限であったから,

$$N(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}})^{it_{\mathfrak{p}}} \rho_{\mathfrak{p},0}(\tilde{c}_{\mathfrak{p}}) = \sum_{\varepsilon_{\mathfrak{p}} \in u_{\mathfrak{p}}/(1+\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}})} c_{\mathfrak{p}}(\varepsilon_{\mathfrak{p}} \pi_{\mathfrak{p}}^{-\text{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d} \mathfrak{f})}) \exp\left(2\pi i \Lambda_{\mathfrak{p}}\left(\varepsilon_{\mathfrak{p}} \pi_{\mathfrak{p}}^{-\text{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d} \mathfrak{f})}\right)\right).$$

以下, 各 $\mathfrak{p} \in S - S_\infty$ に対して素元 $\pi_{\mathfrak{p}}$ は

$$\text{ord}_{\mathfrak{p}'} \pi_{\mathfrak{p}} = 0 \quad \forall \mathfrak{p}' \in S - S_\infty, \mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$$

をみたすように選んであるものとし,

$$F := \prod_{\mathfrak{p} \in S - S_\infty} \pi_{\mathfrak{p}}^{\text{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d} \mathfrak{f})}$$

と置く. このとき $F \pi_{\mathfrak{p}}^{-\text{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d} \mathfrak{f})}$ は $u_{\mathfrak{p}}$ に属するから,

$$\begin{aligned} N(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}})^{it_{\mathfrak{p}}} \rho_{\mathfrak{p},0}(\tilde{c}_{\mathfrak{p}}) &= \sum_{\varepsilon_{\mathfrak{p}} \in u_{\mathfrak{p}}/(1+\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}})} c_{\mathfrak{p}}(\varepsilon_{\mathfrak{p}} F^{-1}) \exp\left(2\pi i \Lambda_{\mathfrak{p}}(\varepsilon_{\mathfrak{p}} F^{-1})\right) \\ &= \overline{c_{\mathfrak{p}}}(F) \sum_{\alpha_{\mathfrak{p}} \in (\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}})^*} c_{\mathfrak{p}}(\alpha_{\mathfrak{p}}) \exp\left(2\pi i \Lambda_{\mathfrak{p}}(\alpha_{\mathfrak{p}} F^{-1})\right). \end{aligned}$$

従って Chinese Remainder Theorem より

$$\begin{aligned} &\prod_{\mathfrak{p} \in S - S_\infty} N(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}})^{it_{\mathfrak{p}}} \rho_{\mathfrak{p},0}(\tilde{c}_{\mathfrak{p}}) \\ &= \prod_{\mathfrak{p} \in S - S_\infty} \overline{c_{\mathfrak{p}}}(F) \cdot \sum_{\alpha \in (\mathfrak{o}/\mathfrak{f})^*} \prod_{\mathfrak{p} \in S - S_\infty} c_{\mathfrak{p}}(\alpha) \cdot \exp\left(2\pi i \sum_{\mathfrak{p} \in S - S_\infty} \Lambda_{\mathfrak{p}}(\alpha F^{-1})\right) \end{aligned}$$

となることがわかる. よって $c_\infty(\mathfrak{a}) := \prod_{\mathfrak{p} \in S_\infty} c_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ と置くと, $\alpha \in k^*$ に対して

$$\prod_{\mathfrak{p} \in S - S_\infty} c_{\mathfrak{p}}(\alpha) = \overline{c_\infty}(\alpha) \overline{\chi}(\varphi_S(\alpha))$$

が成り立ち,

$$\begin{aligned} W(\chi) &= i^{\sum_{\mathfrak{p} \in S_\infty} |n_{\mathfrak{p}}|} \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \chi(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}) \\ &\quad \cdot N\mathfrak{f}^{-1/2} \overline{c_\infty}(F) \overline{\chi}(\varphi_S(F)) \sum_{\alpha \in (\mathfrak{o}/\mathfrak{f})^*} c_\infty(\alpha) \chi(\alpha \mathfrak{o}) \exp\left(-2\pi i \sum_{\mathfrak{p} \in S - S_\infty} \Lambda_{\mathfrak{p}}(\alpha F^{-1})\right) \end{aligned}$$

が得られる.

B.3 L -函数の極と留数

§4.5 の計算において, $\zeta(f, c\|\cdot\|^s)$ は $L(s, \chi)$ に 0 でない定数, 指数函数ならびにガンマ函数を変数変換したものを掛けたものであるから, $L(s, \chi)$ の極は $\zeta(f, c\|\cdot\|^s)$ の極でもある. いま, ある $s \in \mathbb{C}$ に対して $c\|\cdot\|^s = 1$ または $c\|\cdot\|^s = \|\cdot\|$ が成り立ったとすると, いずれの場合にも $c = \|\cdot\|^{it}$ となるような $t \in \mathbb{R}$ が存在する. 従って $\zeta(f, c\|\cdot\|^s)$ が極をもつためには c が $\|\cdot\|^{it}$ ($t \in \mathbb{R}$) の形であることが必要である. このとき, $S = S_\infty$ であつて $\chi(\mathfrak{a}) = N\mathfrak{a}^{-it}$ となるから, $L(s, \chi)$ は Dedekind のゼータ函数を変数変換したものに他ならない: $L(s, \chi) = \zeta_k(s + it)$. よつて c が自明である場合だけを考えればよい.

自明な指標に対応するゼータ函数

$$\zeta(f, \|\cdot\|^s) = |d|^{-1/2} \left(\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right)^{r_1} \left((2\pi)^{1-s} \Gamma(s) \right)^{r_2} \zeta_k(s)$$

は $s = 0$ (i.e. $\|\cdot\|^s = 1$) と $s = 1$ (i.e. $\|\cdot\|^s = \|\cdot\|$) に 1 位の極をもち, それ以外の s に対しては正則である. このこととガンマ函数の性質により, $\zeta_k(s)$ は $s = 1$ に 1 位の極をもち, それ以外の s に対しては正則であることがわかる. また, $\zeta(f, \|\cdot\|^s)$ の $s = 1$ における留数が $\kappa \hat{f}(0) = \kappa |d|^{-1/2}$ であることより, $\zeta_k(s)$ の $s = 1$ での留数は κ であることがわかる.

B.4 Dirichlet の L -函数

最後に, これまでの話を使って Dirichlet の L -函数の函数等式を導いてみる.

$\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ を f (≥ 2) を法とする原始的な Dirichlet 指標, S を無限素点 ∞ と f の素因子全体とからなる集合とし, 各 $p \in S - S_\infty$ に対して $n_p := \text{ord}_p f$ と置く. また

$$L(s, \psi) := \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\psi(a)}{a^s} \quad (\text{Re } s > 1)$$

を Dirichlet の L -函数とする.

いま, 写像 $\chi: \mathbb{J}_S^+ \rightarrow \mathbb{T}$ を

$$\chi(a\mathbb{Z}) := \psi(|a|)$$

により定めると,

$$\chi(a\mathbb{Z}) = 1 \quad \forall a \in 1 + f\mathbb{Z}, > 0$$

が成り立ち, χ は $f\mathbb{Z}$ を法とする原始的な Hecke の類指標になる. また, $L(s, \psi)$ は Hecke の L -函数 $L(s, \chi)$ に一致する. イデアル指標 χ に対応するイデール指標は

$$c(\mathfrak{a}) = (\text{sgn } \mathfrak{a}_\infty)^{n_\infty} \prod_{p \in S - S_\infty} c_p(\mathfrak{a}_p) \cdot \chi(\varphi_S(\mathfrak{a}))$$

と表せて, 任意の $a \in \mathbb{Q}^*$ に対して次をみたす:

$$(\operatorname{sgn} a)^{n_\infty} \prod_{p \in S-S_\infty} c_p(a) \cdot \chi(\varphi_S(a)) = 1.$$

この式で $a = -1, f-1$ とすると

$$(-1)^{n_\infty} \prod_{p \in S-S_\infty} c_p(-1) = 1, \quad \prod_{p \in S-S_\infty} c_p(f-1) \cdot \psi(-1) = 1.$$

ここで, 各 $p \in S-S_\infty$ に対し, $f-1 \equiv -1 \pmod{p^{n_p}}$ より $c_p(f-1) = c_p(-1)$ がわかるから, 上の 2 式を比較して $(-1)^{n_\infty} = \psi(-1)$, すなわち

$$n_\infty = \begin{cases} 0 & \psi(-1) = 1 \text{ の場合} \\ 1 & \psi(-1) = -1 \text{ の場合} \end{cases}$$

が得られる. 従って, f と素であるような $a \in \mathbb{Z}$ に対して次が成り立つ:

$$(\operatorname{sgn} a)^{n_\infty} \chi(a\mathbb{Z}) = \psi(a).$$

さて, $L(s, \chi)$ は全 s -平面に正則に解析接続され,

$$\widehat{L}(s, \chi) := f^{s/2} \Gamma_{\mathbb{R}}(s + n_\infty) L(s, \chi)$$

と置くと, 函数等式

$$\widehat{L}(s, \chi) = W(\chi) \widehat{L}(1-s, \bar{\chi})$$

をみたす. ただし

$$W(\chi) := i^{n_\infty} f^{-1/2} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^*} \psi(a) \exp\left(-2\pi i \sum_{p \in S-S_\infty} \lambda_p(af^{-1})\right)$$

(§B.2 の議論において, 素元 π_p として p をとると $F = f$ となる). ここで, 和公式 (補題 4.1.5) より任意の $a \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{p \in S-S_\infty} \lambda_p(af^{-1}) = -\lambda_\infty(af^{-1}) - \sum_{p \notin S} \lambda_p(af^{-1}) = af^{-1} \pmod{1}$$

が成り立つから,

$$W(\chi) = i^{n_\infty} f^{-1/2} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^*} \psi(a) e^{-2\pi i a/f} = (-i)^{n_\infty} f^{-1/2} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^*} \psi(a) e^{2\pi i a/f}.$$

以上より $L(s, \psi)$ の函数等式を具体的に書き下すことができる. すなわち

$$\widehat{L}(s, \psi) := \begin{cases} f^{s/2} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s, \psi) & \psi(-1) = 1 \text{ の場合} \\ f^{s/2} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s, \psi) & \psi(-1) = -1 \text{ の場合} \end{cases}$$

と置くとき,

$$\widehat{L}(s, \psi) = \begin{cases} f^{-1/2} \tau(\psi) \widehat{L}(1-s, \overline{\psi}) & \psi(-1) = 1 \text{ の場合} \\ -i f^{-1/2} \tau(\psi) \widehat{L}(1-s, \overline{\psi}) & \psi(-1) = -1 \text{ の場合} \end{cases}.$$

ただし

$$\tau(\psi) := \sum_{a \in (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^*} \psi(a) e^{2\pi i a/f}$$

は Gauss の和である.