素数定理一気呵成*

佐藤 篤†

実数 x に対し, x 以下の素数の個数を $\pi(x)$ で表す. このとき, $\pi(x)$ は漸近的に $x/\log x$ に等しい, すなわち

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}=1$$

が成り立つというのが標題にある**素数定理**である. この定理は 1896 年に Hadamard と de la Vallée-Poussin によってそれぞれ独立に証明された. 本稿で解説するのは, 彼等の原証明に近い, 複素解析を用いた証明である.

全体を通して次の記号を用いる.

(i) 十分大きい実数 x に対して定義された複素数値函数 $f(x)$ と $g(x)$ について, $f(x)=O\big(g(x)\big)$ とは, 定数 $C>0$ と x_0 が存在して $x\geq x_0$ で $|f(x)|\leq C\,|g(x)|$ が成り立つことをいう. $g(x)\neq 0$ の場合には, この条件は

$$\limsup_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<\infty$$

と書いてもよい. 十分大きい整数 n に対して定義された複素数値函数 $a(n)$ と $b(n)$ についても, $a(n)=O\big(b(n)\big)$ を同様に定める.

(ii) 十分大きい実数 x に対して定義された複素数値函数 $f(x)$ と $g(x)\neq 0$ について, $f(x)\sim g(x)$ とは

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

が成り立つことをいう. 十分大きい整数 n に対して定義された複素数値函数 $a(n)$ と $b(n)\neq 0$ についても, $a(n)\sim b(n)$ を同様に定める.

---

*学部学生との勉強会 (2003 年 3 月 28 日 – 30 日, 於 東北大学川渡セミナーハウス) 用のテキストに加筆修正 [2006 年 4 月 4 日版]

†東北大学大学院理学研究科数学専攻 (E-mail: `atsushi@math.tohoku.ac.jp`)

1 数論的函数

整数 $n \geq 1$ に対して定義された複素数値函数 (つまり複素数列) を**数論的函数**という. 数論的函数 $a(n)$ が与えられたとき, 実数 x に対して定義された函数

$$A(x) := \sum_{n \leq x} a(n)$$

を $a(n)$ の**総和函数**という. ここで $\sum_{n \leq x}$ は x 以下の正の整数 n に渡る和を表す ($x < 1$ のときには $A(x) := 0$ と定める).

例 1.1 恒等的に 1 であるような数論的函数

$$\mathbf{1}(n) := 1$$

の総和函数は, $x \geq 0$ ならば, x 以下の最大の整数を与える:

$$\sum_{n \leq x} \mathbf{1}(n) = \sum_{n \leq x} 1 = [x] \qquad (x \geq 0).$$

例 1.2 数論的函数

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & n = p^m \ (p \text{ は素数}, m \geq 1 \text{ は整数}) \text{ の場合} \\ 0 & \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

を **Mangoldt の函数**といい, その総和函数

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\log x}{\log p} \right] \log p$$

を $\psi(x)$ で表す. ここで $\sum_{p \leq x}$ は x 以下の素数 p に渡る和を表す.

命題 1.3 $x > 0$ で

$$\psi(x) \leq \pi(x) \log x.$$

[証明]

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\log x}{\log p} \right] \log p \leq \sum_{p \leq x} \frac{\log x}{\log p} \log p = \sum_{p \leq x} \log x = \pi(x) \log x.$$

□

数論的函数 $a(n)$ と $b(n)$ に対し,

$$(a * b)(n) := \sum_{lm=n} a(l)\, b(m)$$

によって定まる数論的函数を $a(n)$ と $b(n)$ の**畳み込み積** (または**接合積**) という. ここで $\sum_{lm=n}$ は $lm = n$ なる正の整数 l, m の組に渡る和を表す. この演算は明らかに可換で, 上の定義は次のように書いてもよい:

$$(a * b)(n) := \sum_{d|n} a(d)\, b\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} a\left(\frac{n}{d}\right) b(d).$$

ここで $\sum_{d|n}$ は n の全ての正の約数 d に渡る和を表す.

例 1.4 $\mathbf{1}(n)$ と $\Lambda(n)$ の畳み込み積は

$$(\mathbf{1} * \Lambda)(n) = \log n$$

となる. 実際, n の素因数分解を $n = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$ とするとき, n の正の約数 d のうち $\Lambda(d) \neq 0$ となるのは d が p_i^j $(1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq m_i)$ と書けるときで, そのとき $\Lambda(d) = \log p_i$ となる. 従って

$$(\mathbf{1} * \Lambda)(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d) = m_1 \log p_1 + \cdots + m_r \log p_r = \log n.$$

2 Dirichlet 級数

数論的函数 $a(n)$ に対し, 複素数 s を変数とする函数項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

を $a(n)$ に対応する **Dirichlet 級数**という. ここで $n^s := e^{s \log n}$ (対数函数は $\log n$ が実数となるような枝をとる). 伝統に従い, s の実部と虚部をそれぞれ σ と t で表す. このとき

$$n^s = e^{(\sigma + it)\log n} = n^{\sigma}\big(\cos(t \log n) + i \sin(t \log n)\big), \qquad |n^s| = n^{\sigma}.$$

命題 2.1 $a(n)$ を数論的函数とし, $f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, n^{-s}$ を対応する Dirichlet 級数とする.

(i) $f(s)$ は, $s = s_0\ (= \sigma_0 + it_0)$ で絶対収束するならば, $\sigma \geq \sigma_0$ で一様に絶対収束し, 半平面 $\sigma > \sigma_0$ 上の正則な函数を与える.

(ii) 定数 κ が存在して $a(n) = O(n^{\kappa})$ が成り立つならば, $f(s)$ は $\sigma > 1 + \kappa$ で絶対収束する. 特に, $a(n)$ が有界ならば $f(s)$ は $\sigma > 1$ で絶対収束する.

[証明] (i) $\sigma \geq \sigma_0$ ならば

$$\left|\frac{a(n)}{n^s}\right| = \frac{|a(n)|}{n^\sigma} \leq \frac{|a(n)|}{n^{\sigma_0}} = \left|\frac{a(n)}{n^{s_0}}\right|$$

となることによる.

(ii) 仮定より, 定数 $C > 0$ が存在して

$$\left|\frac{a(n)}{n^s}\right| \leq C\frac{1}{n^{\sigma-\kappa}}$$

が成り立つから,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\sigma-\kappa}} \leq 1 + \int_1^N \frac{dx}{x^{\sigma-\kappa}}$$

により主張を得る. $\square$

例 2.2 Mangoldt の函数に対応する Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, n^{-s}$ は $\sigma > 1$ で絶対収束する. 実際, 明らかに $0 \leq \Lambda(n) \leq \log n$ であるから, 任意の $\delta > 0$ に対して $\Lambda(n) = O(n^\delta)$ が成り立ち, 上の Dirichlet 級数は $\sigma > 1 + \delta$ で絶対収束する.

定理 2.3 $a(n)$ を数論的函数, $A(x)$ をその総和函数とするとき, $A(x) = O(x^{\sigma_0})$ ならば, $a(n)$ に対応する Dirichlet 級数は $\sigma > \sigma_0$ で収束し,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = s\int_1^{\infty} \frac{A(x)}{x^{s+1}}\, dx.$$

[証明] 整数 $n \geq 1$ に対して $A(n) - A(n-1) = a(n)$ が成り立つことより,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{a(n)}{n^s} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{A(n) - A(n-1)}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} \frac{A(n)}{n^s} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{A(n)}{(n+1)^s} \\ &= \frac{A(N)}{N^s} + \sum_{n=1}^{N-1} A(n)\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right).\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} = s\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{s+1}}$$

ならびに $n \leq x < n+1$ では $A(x) = A(n)$ となることより,

$$\sum_{n=1}^{N-1} A(n)\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) = s\sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{A(x)}{x^{s+1}}\, dx = s\int_1^N \frac{A(x)}{x^{s+1}}\, dx.$$

従って

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a(n)}{n^s}=\frac{A(N)}{N^s}+s\int_1^N\frac{A(x)}{x^{s+1}}\,dx$$

となり, $N\to\infty$ として主張を得る. □

命題 2.4 $a(n)$ を数論的函数, $A(x)$ をその総和函数とするとき, 定数 $\sigma_0\geq 0$ が存在して $a(n)$ に対応する Dirichlet 級数が $\sigma>\sigma_0$ で絶対収束するならば, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $A(x)=O(x^{\sigma_0+\varepsilon})$ が成り立つ.

[証明] 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $x>0$ ならば

$$\frac{|A(x)|}{x^{\sigma_0+\varepsilon}}\leq\sum_{n\leq x}\frac{|a(n)|}{x^{\sigma_0+\varepsilon}}\leq\sum_{n\leq x}\frac{|a(n)|}{n^{\sigma_0+\varepsilon}}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a(n)|}{n^{\sigma_0+\varepsilon}}$$

となることによる. □

命題 2.5 数論的函数 $a(n)$ と $b(n)$ に対応する Dirichlet 級数が共に $\sigma>\sigma_0$ で絶対収束するならば, この範囲で $a(n)$ と $b(n)$ の畳み込み積に対応する Dirichlet 級数も絶対収束し,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a*b)(n)}{n^s}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^s}\right).$$

[証明]

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^s}\right)=\sum_{l,m=1}^{\infty}\frac{a(l)\,b(m)}{(lm)^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{lm=n}a(l)\,b(m)$$

となることによる. □

3 Riemann のゼータ函数

数論的函数 $\mathbf{1}(n)$ に対応する Dirichlet 級数

$$\zeta(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

は, 命題 2.1 より, 半平面 $\sigma>1$ で絶対収束して正則函数を定める. この函数を **Riemann のゼータ函数**という.

命題 3.1 $\sigma > 1$ で

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}, \qquad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

ここで $\Lambda(n)$ は Mangoldt の函数を表す.

[証明] 前者の式は $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ の項別微分に過ぎない. また, 例 2.2 で述べたように $\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, n^{-s}$ は $\sigma > 1$ で絶対収束し, 例 1.4 と命題 2.5 より

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{1} * \Lambda)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}.$$

よって前者の式を用いて後者を得る. □

定理 3.2 (i) $\sigma > 1$ で

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}}\, dx.$$

(ii) $\zeta(s)$ は半平面 $\sigma > 0$ 上の有理型函数に解析接続され, その範囲では $s = 1$ がただ 1 つの極である. また, $s = 1$ は 1 位の極で留数は 1 である.

[証明] (i) 例 1.1 と定理 2.3 による.

(ii) $\sigma > 1$ で

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$$

となるから, (i) より

$$\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = s \int_1^{\infty} \frac{[x] - x}{x^{s+1}}\, dx.$$

ここで, 右辺の積分は $\sigma \geq \delta$ ($\delta > 0$ は任意) で一様に収束し, 正則函数を与える. □

定理 3.3 $s = 1 + it$ ($t \neq 0$) において $\zeta(s)$ は 0 にならない.

[証明] まず, 定理 3.2 より

$$\lim_{s \to 1} (s-1) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -1.$$

いま, $t_0 \neq 0$ に対し, $s = 1 + it_0$ が $\zeta(s)$ の a 位の零点 ($a \geq 1$), $s = 1 + 2it_0$ が $\zeta(s)$ の b 位の零点 ($b \geq 0$) であるとすると

$$\lim_{s \to 1+it_0} (s - 1 - it_0) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = a, \qquad \lim_{s \to 1+2it_0} (s - 1 - 2it_0) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b$$

となるから,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(3\varepsilon\frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)}+4\varepsilon\frac{\zeta'(1+\varepsilon+it_0)}{\zeta(1+\varepsilon+it_0)}+\varepsilon\frac{\zeta'(1+\varepsilon+2it_0)}{\zeta(1+\varepsilon+2it_0)}\right)=-3+4a+b\geq 1.$$

他方, 命題 3.1 より $\sigma>1$ で

$$\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\bigl(\cos(t\log n)-i\sin(t\log n)\bigr)$$

が成り立つから, $\varepsilon>0$ に対して

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left(3\varepsilon\frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)}+4\varepsilon\frac{\zeta'(1+\varepsilon+it_0)}{\zeta(1+\varepsilon+it_0)}+\varepsilon\frac{\zeta'(1+\varepsilon+2it_0)}{\zeta(1+\varepsilon+2it_0)}\right)\\&\quad=-\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+\varepsilon}}\bigl(3+4\cos(t_0\log n)+\cos(2t_0\log n)\bigr)\end{aligned}$$

となるが, $\Lambda(n)\geq 0$ であることと恒等式

$$3+4\cos\theta+\cos(2\theta)=2\bigl(1+\cos\theta\bigr)^2$$

より

$$\mathrm{Re}\left(3\varepsilon\frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)}+4\varepsilon\frac{\zeta'(1+\varepsilon+it_0)}{\zeta(1+\varepsilon+it_0)}+\varepsilon\frac{\zeta'(1+\varepsilon+2it_0)}{\zeta(1+\varepsilon+2it_0)}\right)\leq 0$$

となり矛盾. よって $\zeta(1+it)\neq 0$ $(t\neq 0)$ でなければならない. □

4 素数定理の証明

数論的函数 $a(n)$ に対し, 総和函数 $\sum_{n\leq x}a(n)$ と Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\,n^{-s}$ との間には定理 2.3 で述べたような密接な関係がある. 次の定理は, 素数定理の証明のためには必要ではないが, 重要な事実なのでここで述べておく:

定理 4.1 数論的函数 $a(n)$ の総和函数を $A(x)$ とするとき, 定数 $\alpha\neq 0$ が存在して $A(x)\sim\alpha x$ が成り立つならば, $a(n)$ に対応する Dirichlet 級数は $\sigma>1$ で収束して次をみたす:

$$\lim_{\sigma\to 1+0}(\sigma-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^{\sigma}}=\alpha.$$

上で述べた定理とは逆に, 次の定理のように Dirichlet 級数の性質から総和函数の漸近的な挙動を導く定理を **Tauber 型定理**という:

定理 4.2 (Wiener-Ikehara-Landau の定理) $a(n)$ を 0 以上の実数に値をとる数論的函数とし, $a(n)$ に対応する Dirichlet 級数 $f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, n^{-s}$ は $\sigma > 1$ で絶対収束するとする. このとき, 定数 $\alpha \neq 0$ が存在して $f(s) - \alpha/(s-1)$ が $\sigma \geq 1$ に正則に解析接続されるならば, $a(n)$ の総和函数 $A(x)$ は次をみたす:

$$A(x) \sim \alpha x.$$

定理 4.2 を用いれば, 素数定理は直ちに示すことができる (定理 4.1 と定理 4.2 の証明は次節で与える).

定理 4.3 Mangoldt の函数 $\Lambda(n)$ の総和函数 $\psi(x)$ は次をみたす:

$$\psi(x) \sim x.$$

[証明] $\Lambda(n)$ に定理 4.2 を適用すればよい. なお, Dirichlet 級数 $f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, n^{-s}$ が $\sigma > 1$ で絶対収束することは例 2.2 で述べてある. また, 命題 3.1, 定理 3.2 の (ii), ならびに定理 3.3 より

$$f(s) - \frac{1}{s-1} = -\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right)$$

は $\sigma \geq 1$ で正則である. □

定理 4.4 (素数定理)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

[証明] $x > e$ であるとし, $\omega(x) := x/(\log x)^2$ と置く. このとき $1 < \omega(x) < x$ であって,

$$\pi(x) - \pi\bigl(\omega(x)\bigr) \leq \sum_{\omega(x) < p \leq x} \frac{\log p}{\log \omega(x)} \leq \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{\log \omega(x)} \leq \frac{\psi(x)}{\log \omega(x)}.$$

ここで $\sum_{\omega(x) < p \leq x}$ は $\omega(x) < p \leq x$ なる素数 p に渡る和を表す. 従って

$$\pi(x) \leq \pi\bigl(\omega(x)\bigr) + \frac{\psi(x)}{\log \omega(x)} \leq \frac{x}{(\log x)^2} + \frac{\psi(x)}{\log x - 2\log\log x}.$$

よって, 命題 1.3 より

$$\psi(x) \leq \pi(x) \log x \leq \frac{x}{\log x} + \frac{\psi(x)\log x}{\log x - 2\log\log x}$$

となり,

$$\frac{\psi(x)}{x} \le \frac{\pi(x)\log x}{x} \le \frac{1}{\log x} + \frac{\psi(x)}{x}\cdot\frac{\log x}{\log x - 2\log\log x}.$$

故に

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\log x} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\log x - 2\log\log x} = 1,$$

ならびに定理 4.3 より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$$

と $\pi(x) \sim x/\log x$ を得る. □

系 4.5 n 番目の素数を p_n と書くとき,

$$p_n \sim n\log n.$$

[証明] 定理 4.4 より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\log p_n}{p_n} = 1$$

となるから, 対数をとって $\log p_n$ で割ることにより

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log n}{\log p_n} + \frac{\log\log p_n}{\log p_n}\right) = 1$$

がわかる. ここで, $\log\log p_n/\log p_n$ は 0 に収束するから,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log p_n} = 1.$$

従って

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\log n}{p_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\log p_n}{p_n}\cdot\frac{\log n}{\log p_n} = 1$$

と $p_n \sim n\log n$ を得る. □

5 定理 4.1 と定理 4.2 の証明

定理 4.1 は, Dirichlet 級数の積分表示と $\zeta(s)$ の性質を用いて容易に示すことができる.

[定理 4.1 の証明] $\alpha = 1$, すなわち $A(x) \sim x$ の場合に示せばよい. このとき, 定理 2.3 より, $f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, n^{-s}$ は $\sigma > 1$ で収束して

$$f(s) = s\int_1^{\infty}\frac{A(x)}{x^{s+1}}\,dx$$

が成り立つ. 従って, 定理 3.2 の (i) より, $\sigma > 1$ で

$$f(s) - \zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{A(x) - [x]}{x^{s+1}}\,dx.$$

いま, 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. このとき $A(x) \sim x$ より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x) - [x]}{x} = 0$$

となることがわかるから, 定数 $x_0 \geq 1$ が存在して

$$x \geq x_0 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{A(x) - [x]}{x}\right| < \varepsilon$$

が成り立つ. 従って, $C := \sup_{1\leq x\leq x_0}\bigl|A(x) - [x]\bigr|$ と置くと

$$\bigl|f(\sigma) - \zeta(\sigma)\bigr| \leq \sigma\left(\int_1^{x_0} \frac{C}{x^{\sigma+1}}\,dx + \int_{x_0}^\infty \frac{\varepsilon}{x^\sigma}\,dx\right) \leq \sigma\left(Cx_0 + \frac{\varepsilon}{\sigma - 1}\right)$$

となり,

$$\limsup_{\sigma\to 1+0} \bigl|(\sigma - 1)\bigl(f(\sigma) - \zeta(\sigma)\bigr)\bigr| \leq \lim_{\sigma\to 1} \sigma\bigl(Cx_0(\sigma - 1) + \varepsilon\bigr) = \varepsilon.$$

よって, ε が任意であることより,

$$\lim_{\sigma\to 1+0} (\sigma - 1)\bigl(f(\sigma) - \zeta(\sigma)\bigr) = 0.$$

他方, 定理 3.2 の (ii) より $\lim_{s\to 1}(s - 1)\zeta(s) = 1$ となるから,

$$\lim_{\sigma\to 1+0} (\sigma - 1)f(\sigma) = 1$$

と主張を得る. □

上で述べた定理 4.1 の証明に比べると, 以下で与える定理 4.2 の証明は技巧的で複雑なものである.

補題 5.1

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^2 \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) e^{ivt}\,dt = \frac{\sin^2 v}{v^2}.$$

ただし $v = 0$ のときには右辺は 1 とする.

[証明]

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^2 \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) e^{ivt}\,dt = \int_0^2 \left(1 - \frac{t}{2}\right) \cos(vt)\,dt$$

より容易. □

補題 5.2 (Riemann-Lebesgue の定理) 閉区間 $-R \le t \le R$ 上の連続な複素数値函数 $F(t)$ に対し,

$$\lim_{y\to\infty}\int_{-R}^{R} F(t)\, e^{iyt}\, dt = \lim_{y\to-\infty}\int_{-R}^{R} F(t)\, e^{iyt}\, dt = 0.$$

[証明] 略. $\square$

[定理 4.2 の証明] 定理の条件をみたすような定数 α は正の実数であることが容易にわかるから, $\alpha = 1$ であるとしてよい. すなわち, 実数 u に対して $H(u) := e^{-u}A(e^u)$ と置いて, $H(u) \sim 1$ となることを示せばよい. $a(n) \ge 0$ なる仮定より $A(x)$ は非負の単調増大函数であって, 従って $H(u)$ も非負である.

まず, 定理 2.3 と命題 2.4 より, $\sigma > 1$ で

$$f(s) = s\int_1^\infty \frac{A(x)}{x^{s+1}}\, dx$$

が成り立つが, $x = e^u$ なる変数変換により

$$\int_1^\infty \frac{A(x)}{x^{s+1}}\, dx = \int_0^\infty \frac{A(e^u)}{e^{su}}\, du = \int_0^\infty \frac{H(u)}{e^{(s-1)u}}\, du$$

となるから,

$$\frac{1}{s}\left(f(s) - \frac{s}{s-1}\right) = \int_0^\infty \bigl(H(u) - 1\bigr)e^{-(s-1)u}\, du. \tag{1}$$

仮定より左辺は $\sigma \ge 1$ で正則である. また, 容易にわかるように, 右辺の積分は $\sigma \ge 1+\delta$ ($\delta > 0$ は任意) で一様に収束する.

次に, 実数のパラメータ $y > 0,\ \lambda > 0,\ \varepsilon > 0$ と t をとり, (1) において $s := 1 + \varepsilon + i\lambda t$ と置くと,

$$\frac{1}{1+\varepsilon+i\lambda t}\left(f(1+\varepsilon+i\lambda t) - \frac{1+\varepsilon+i\lambda t}{\varepsilon+i\lambda t}\right) = \int_0^\infty \bigl(H(u)-1\bigr)e^{-(\varepsilon+i\lambda t)u}\, du.$$

この両辺に $(1 - |t|/2)\, e^{i\lambda yt}$ を掛けて $-2 \le t \le 2$ で積分すると, 右辺は

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{2}\left(1 - \frac{|t|}{2}\right) e^{i\lambda yt}\left(\int_0^\infty \bigl(H(u)-1\bigr)e^{-(\varepsilon+i\lambda t)u}\, du\right) dt \\
&= \int_0^\infty \bigl(H(u)-1\bigr)e^{-\varepsilon u}\left(\int_{-2}^{2}\left(1 - \frac{|t|}{2}\right) e^{i\lambda(y-u)t}\, dt\right) du =: (\dagger)
\end{aligned}$$

となる．ただし, 積分の順序を交換する際に (1) の右辺の積分が t に関して一様に収束することを用いた．最後の積分で $v=\lambda(y-u)$ と変数変換すると, 補題 5.1 より

$$
\begin{aligned}
(\dagger) &= \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\lambda y}\left(H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)-1\right)e^{-\varepsilon(y-v/\lambda)}\left(\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{ivt}\,dt\right)dv\\
&= \frac{2}{\lambda}\int_{-\infty}^{\lambda y}\left(H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)-1\right)e^{-\varepsilon(y-v/\lambda)}\,\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv\\
&= \frac{2}{\lambda}\int_{-\infty}^{\lambda y}H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)e^{-\varepsilon(y-v/\lambda)}\,\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv-\frac{2}{\lambda}\int_{-\infty}^{\lambda y}e^{-\varepsilon(y-v/\lambda)}\,\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv.
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{i\lambda yt}\,\frac{1}{1+\varepsilon+i\lambda t}\left(f(1+\varepsilon+i\lambda t)-\frac{1+\varepsilon+i\lambda t}{\varepsilon+i\lambda t}\right)dt\\
&=\int_{-\infty}^{\lambda y}H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)e^{-\varepsilon(y-v/\lambda)}\,\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv-\int_{-\infty}^{\lambda y}e^{-\varepsilon(y-v/\lambda)}\,\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ここで, 仮定より

$$
f_\lambda(t):=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(f(1+\varepsilon+i\lambda t)-\frac{1+\varepsilon+i\lambda t}{\varepsilon+i\lambda t}\right)
$$

が存在し, λ を固定するとき $f_\lambda(t)$ は t の連続函数である．従って (2) で $\varepsilon\to+0$ とすると, 左辺は

$$
\frac{\lambda}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)\frac{f_\lambda(t)}{1+\varepsilon+i\lambda t}\,e^{i\lambda yt}\,dt
$$

に収束する．また, 容易にわかるように

$$
\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\lambda y}e^{-\varepsilon(y-v/\lambda)}\,\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv=\int_{-\infty}^{\lambda y}\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv.
$$

これより

$$
\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\lambda y}H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)e^{-\varepsilon(y-v/\lambda)}\,\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv=\int_{-\infty}^{\lambda y}H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv
$$

ならびに

$$
\frac{\lambda}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)\frac{f_\lambda(t)}{1+\varepsilon+i\lambda t}\,e^{i\lambda yt}\,dt=\int_{-\infty}^{\lambda y}H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv-\int_{-\infty}^{\lambda y}\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv
$$

が成り立つことがわかる．この式において $y\to\infty$ とすると, 補題 5.2 より左辺は 0 に収束する．従って

$$
K(y,\lambda):=\int_{-\infty}^{\lambda y}H\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv,\qquad P:=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv
$$

(実際には $P=\pi$ となるが, P の具体的な値を知る必要はない) と置くと,

(3) $$\lim_{y\to\infty} K(y,\lambda) = P.$$

さて, 函数 $A(x)$ は単調増大であったから, $v \le u$ ならば $H(v) = e^{-v}A(e^v) \le e^{-v}A(e^u) = e^{u-v}H(u)$ となる. これより $\lambda > 0$ に対して

(4) $$|v| \le \sqrt{\lambda} \quad \Longrightarrow \quad H\left(y - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{-2/\sqrt{\lambda}} \le H\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \le H\left(y + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{2/\sqrt{\lambda}}$$

が成り立つことが容易にわかる. いま, $y \ge 1/\sqrt{\lambda}$ ならば, (4) より

$$K(y,\lambda) \ge \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} H\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv \ge H\left(y - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{-2/\sqrt{\lambda}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv$$

となるから, (3) より

$$P \ge \limsup_{y\to\infty}\, H\left(y - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{-2/\sqrt{\lambda}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv.$$

これより

$$\limsup_{u\to\infty} H(u) = \limsup_{y\to\infty} H\left(y - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \le P\, e^{2/\sqrt{\lambda}} \Bigg/ \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv$$

を得る. ここで $\lambda \to \infty$ とすると

(5) $$\limsup_{u\to\infty} H(u) \le \frac{P\cdot 1}{P} = 1.$$

よって $H(u)$ は有界である. そこで $H(u) \le C$ なる定数 $C > 0$ をとると, 再び (4) より

$$\begin{aligned} K(y,\lambda) &\le \int_{-\infty}^{\infty} H\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv \\ &\le C \int_{-\infty}^{-\sqrt{\lambda}} \frac{dv}{v^2} + H\left(y + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{2/\sqrt{\lambda}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv + C \int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} \frac{dv}{v^2} \\ &\le \frac{2C}{\sqrt{\lambda}} + H\left(y + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{2/\sqrt{\lambda}}\, P. \end{aligned}$$

従って, 再び (3) より

$$P \le \frac{2C}{\sqrt{\lambda}} + \liminf_{y\to\infty} H\left(y + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{2/\sqrt{\lambda}}\, P$$

となり,

$$\liminf_{u\to\infty} H(u) = \liminf_{y\to\infty} H\left(y+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \geq \left(P-\frac{2C}{\sqrt{\lambda}}\right)\Bigg/ P\, e^{2/\sqrt{\lambda}}$$

を得る. ここで $\lambda\to\infty$ とすると,

$$\liminf_{u\to\infty} H(u) \geq \frac{P-0}{P\cdot 1} = 1. \tag{6}$$

(5) と (6) より, 求める $H(u)\sim 1$ を得る. □

参考文献

[1] T. M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Undergraduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1976.

[2] 河田 敬義, 数論 — 古典数論から類体論へ, 岩波書店, 1992.

[3] 末綱 恕一, 解析的整数論, 岩波書店, 1950.