

## 存在しない数を計算する\*

佐藤 篤†

数学の本質はその自由性にある.

— カントール

整数の列の規則性を見つけてくれる

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

<http://oeis.org/>

というウェブページがある. 使い方は簡単で, 検索窓に 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5 と入力すれば “円周率の小数展開 (Decimal expansion of Pi)” を始めとする 10 個の候補が挙がり, 1, 4, 1, 4, 2, 1, 3, 5, 6 と入力すれば “ $\sqrt{2}$  の小数展開 (Decimal expansion of square root of 2)” を始めとする 3 個の候補が挙がる, といった具合である. 円周率や  $\sqrt{2}$  のような有名な数が第一候補となる場合には, 下位の候補に注目すれば興味深い発見があるかもしれない.

それでは, 整数列

7, 8, 5, 4, 3, 1, 5, 9, 8, 7

はどのような規則性をもっているだろうか? 上記のウェブページで検索すると

全ての  $n$  に対して  $x^3 \equiv 3 \pmod{10^n}$  をみたす 10 進整数  $x$

(10-adic integer  $x$  such that  $x^3 \equiv 3 \pmod{10^n}$  for all  $n$ )

という候補だけが見つかる. その意味を理解するためには, まず各項をそれぞれ一の位, 十の位, 百の位, 千の位, ... とするような整数列

7, 87, 587, 4587, 34587, 134587, 5134587, 95134587, 895134587, 7895134587

---

\*第 17 回仙台数学セミナー (2010 年 8 月 10 日 – 12 日) 配布資料に加筆修正 [2015 年 7 月 9 日版]

†東北学院大学教養学部 (E-mail: [atsushi@mail.tohoku-gakuin.ac.jp](mailto:atsushi@mail.tohoku-gakuin.ac.jp))

を考え、その 3 乗を計算してみる必要がある。コンピュータを用いて計算を実行すると、次のようになる:

$$\begin{aligned}
 7^3 &= 34\textbf{3}, \\
 87^3 &= 6585\textbf{03}, \\
 587^3 &= 202262\textbf{003}, \\
 4587^3 &= 9651309\textbf{0003}, \\
 34587^3 &= 413750643\textbf{00003}, \\
 134587^3 &= 2437863235\textbf{000003}, \\
 5134587^3 &= 13536816777177\textbf{0000003}, \\
 95134587^3 &= 8610241078561254\textbf{00000003}, \\
 895134587^3 &= 717240846292641491\textbf{000000003}, \\
 7895134587^3 &= 49212860964100951344\textbf{0000000003}.
 \end{aligned}$$

右辺の下線部に注目すれば、徐々に 3 に“近づいて”行くことがわかるだろう。ただし、そのように考えるためには、次のような意識改革を行う必要がある:

数とは 10 種類の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 を並べたものであって、左側に位置する数字ほど“大きさ”への寄与が少ない。

“数”を 0 以上の整数だと思ふことにすれば、前半の主張は不自然なものではない。しかし、後半の主張を受け入れるのには抵抗があるかもしれない。通常の価値観では左側に位置する数字ほど“大きさ”への寄与が多いからである。例えば、4 桁の数の大きさを比べるときには、まず千の位を比較し、千の位が同じ場合には百の位を比較し、... と高い桁から順に見て行くのが普通の考え方である:

通常の価値観

|     |        |        |        |        |
|-----|--------|--------|--------|--------|
| ... | $10^3$ | $10^2$ | $10^1$ | $10^0$ |
| 大   | ←————→ |        |        | 小      |

上の意識改革は、この価値観を逆転して高い桁の数字ほど軽視することを提唱している:

新しい価値観

|     |        |        |        |        |
|-----|--------|--------|--------|--------|
| ... | $10^3$ | $10^2$ | $10^1$ | $10^0$ |
| 小   | ←————→ |        |        | 大      |

従って、新しい価値観に基づいて考えるためには、数直線は忘れ去って、数の見た目に注目するように心掛ける必要がある。

新しい価値観に目覚めてしまえば,  $\dots 111111$  (全ての桁が 1) や  $\dots 123123$  (123 の繰り返し) のような長さ (桁) が無限の “数” も抵抗なく受け入れられるようになるだろう. 本稿で扱うのは, このような通常の意味では存在しない “整数” の計算である.

## §1 無限整数の計算

以下では,  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  を並べて得られる長さが無限の “整数” のことを無限整数と呼ぶことにする.  $0$  以上の (通常の意味での) 整数は, 左側の空欄に  $0$  が無限に並んでいると思えば, 無限整数と見なせる.

$\alpha, \beta$  を無限整数とすると, 和  $\alpha + \beta$  や積  $\alpha\beta$  の計算は通常の筆算と全く同様に行うことができる. 通常の計算と同様に,  $\alpha + \beta$  や  $\alpha\beta$  の下  $n$  桁を求めるためには  $\alpha$  と  $\beta$  の下  $n$  桁がわかれば十分であるから, 和や積の各桁の数字は (データと根気があれば) いくらでも計算できる. ただし, 繰り上がりが無限に続く場合には, 通常の計算とは異なる現象が起きる. 差  $\alpha - \beta$  も通常の筆算と同様に計算することができるが, 繰り下がりが無限に続く場合には注意が必要である.

**例 1.1** 全ての桁が 9 である無限整数  $\dots 999999$  に 1 を加えると, 繰り上がりが無限に続いた結果, 和は 0 になる:

$$\begin{array}{r} \phantom{\dots} 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \dots\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9 \\ + \phantom{\dots} \phantom{9\ 9\ 9\ 9\ 9} 1 \\ \hline \dots\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

従って  $\dots 999999 = -1$  であると考えられる. このことは  $0 - 1$  を直接計算しても確かめられる:

$$\begin{array}{r} \phantom{\dots} 9\ 9\ 9\ 9\ 9 \\ \phantom{\dots} \phantom{9\ 9\ 9\ 9\ 9} 0 \\ - \phantom{\dots} \phantom{9\ 9\ 9\ 9\ 9} 1 \\ \hline \dots\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9 \end{array}$$

同様の計算により

$$\dots 999998 = -2, \quad \dots 999997 = -3, \quad \dots 999996 = -4, \quad \dots$$

となることがわかるから, 負の整数は無限整数としての表示をもつ.

**注意 1.2**  $9 = 10 - 1$ ,  $99 = 100 - 1$ ,  $999 = 1000 - 1$  のように,  $9$  を  $n$  個並べた数は  $10^n - 1$  に一致する:

$$\overbrace{99\dots 9}^n = 10^n - 1.$$

新しい価値観では, 10 を何回も掛け合わせると限りなく “小さく” なる訳であるから,  $\dots 999999 = -1$  は上の式で  $n \rightarrow \infty$  とした極限と見なすこともできる.

**例 1.3** 全ての桁が 1 である無限整数  $\dots 111111$  に 9 を掛けると  $\dots 999999 = -1$  となるから,  $\dots 111111 = -1/9$  であると考えられる. この両辺に 8 を掛ければ  $\dots 888888 = -8/9$  となり, さらに 1 を加えれば  $\dots 888889 = 1/9$  が得られる.  $\dots 888889$  に 9 を掛けると 1 となることは, 次のように直接確かめることもできる:

$$\begin{array}{r} \dots 888889 \\ \times \qquad \qquad \qquad 9 \\ \hline \qquad \qquad \qquad 88888 \\ \dots 000001 \end{array}$$

$\dots 999999 = -1$  と  $\dots 111111 = -1/9$  の積を計算して  $\dots 888889 = 1/9$  を示してもよい:

$$\begin{array}{r} \dots 999999 \\ \times \dots 111111 \\ \hline \dots 999999 \\ \dots 999999 \\ \dots 999999 \\ \dots 999999 \\ \dots 999999 \\ \dots 999999 \\ \dots 999999 \\ \dots 999999 \\ \hline \dots \overset{4}{8}\overset{3}{8}\overset{2}{8}\overset{1}{8}89 \end{array}$$

慣れてしまえば無限整数の計算は難しいものではなく, (通常世界における) 無限小数の計算よりも易しいとさえいえる.

通常世界においては, 循環小数が表す数は有理数であり, 逆に有理数は循環小数 (ただし分母が  $2^k 5^l$  の形のとときには有限小数) に展開された. 無限整数の世界においても, “循環整数” が表す数は有理数と深く結びついている.

**例 1.4** (1)  $\dots 111111 = -1/9$  の両辺に  $a$  ( $= 0, 1, \dots, 9$ ) を掛けると

$$\dots aaaaaa = -\frac{a}{9}.$$

(2)  $\dots 010101$  に 99 を掛けると  $\dots 999999 = -1$  となるから,  $\dots 010101 = -1/99$ . この両辺に  $ab = 10a + b$  ( $a, b = 0, 1, \dots, 9$ ) を掛けると

$$\dots ababab = -\frac{ab}{99}.$$

(3)  $\cdots 001001$  に 999 を掛けると  $\cdots 999999 = -1$  となるから,  $\cdots 001001 = -1/999$ . この両辺に  $abc = 100a + 10b + c$  ( $a, b, c = 0, 1, \dots, 9$ ) を掛けると

$$\cdots abcabc = -\frac{abc}{999}.$$

注意 1.5 上の例と同様にして

$$\cdots \overbrace{00 \cdots 0}^{l-1} 1 \overbrace{00 \cdots 0}^{l-1} 1 = -\frac{1}{10^l - 1}$$

が示せる. この式は

$$10^{nl} + \cdots + 10^{2l} + 10^l + 1 = \frac{10^{(n+1)l} - 1}{10^l - 1}$$

において  $n \rightarrow \infty$  とした極限と見なすこともできる.

より一般に, 次の定理が成り立つことが示せる:

定理 1.6 循環する無限整数が表す数は分母が 10 と互いに素であるような有理数である. 逆に, 分母が 10 と互いに素であるような有理数は循環する無限整数に展開される.

練習問題 1.7  $1/11$  の無限整数展開を求めよ.

## §2 開平法とニュートン法

我々の当面の目標は, 3 乗すれば 3 になるような無限整数 (3 の “立方根”) を求めて, 冒頭に挙げた整数列

$$7, 8, 5, 4, 3, 1, 5, 9, 8, 7$$

の謎に迫ることなのであるが, このへんで休息を兼ねて通常世界における平方根の計算法を復習しておこう.

2 の (正の) 平方根の小数展開  $\sqrt{2} = 1.41421356 \cdots$  は,

$$\text{正の数 } x, y \text{ に対して } x < y \iff x^2 < y^2$$

という原理に基づいた, 以下のような計算によって得られるのであった:

|                                                     |                |
|-----------------------------------------------------|----------------|
| $1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4$                             | より 整数部分は 1;    |
| $1.4^2 = 1.96 < 2 < 1.5^2 = 2.25$                   | より 小数第 1 位は 4; |
| $1.41^2 = 1.9881 < 2 < 1.42^2 = 2.0164$             | より 小数第 2 位は 1; |
| $1.414^2 = 1.999396 < 2 < 1.415^2 = 2.002225$       | より 小数第 3 位は 4; |
| $1.4142^2 = 1.99996164 < 2 < 1.4143^2 = 2.00024449$ | より 小数第 4 位は 2; |
| .....                                               |                |

精度の高い計算機が使えるのであれば、このようにして小数展開はどこまでも求めることができる。筆算や算盤で上の計算を効率よく行えるようにした開平法という計算法もある：

|                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $  \begin{array}{r}  1 \\  \hline  24 \\  4 \\  \hline  281 \\  1 \\  \hline  2824 \\  4 \\  \hline  28282 \\  2 \\  \hline  28284  \end{array}  $ | $  \begin{array}{r}  1.4142 \\  \hline  2 \\  1 \\  \hline  100 \\  96 \\  \hline  400 \\  281 \\  \hline  11900 \\  11296 \\  \hline  60400 \\  56564 \\  \hline  3836  \end{array}  $ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

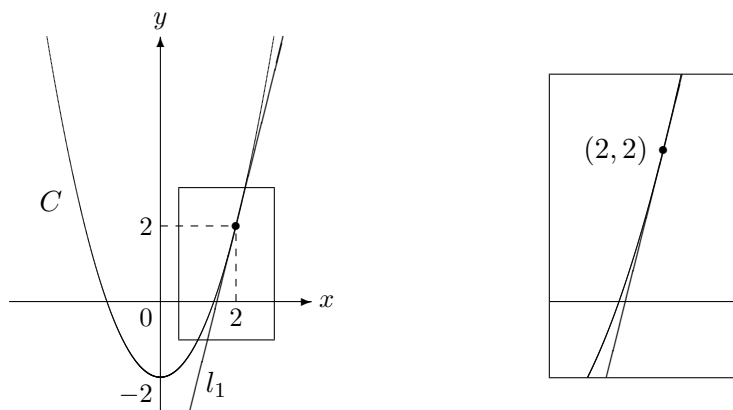
練習問題 2.1 上の筆算の意味を解説せよ。

上記の方法を用いれば  $\sqrt{2}$  の小数展開を順に得ることができる。それとは別に、以下で述べるような、放物線  $y = x^2 - 2$  の接線を利用して  $\sqrt{2}$  の近似値を効率よく求める方法もある。

放物線  $C : y = x^2 - 2$  の点  $(2, 2)$  における接線を  $l_1$  とし、 $l_1$  と  $x$  軸との交点を  $(\alpha_1, 0)$  とすると

$$l_1 : y = 4x - 6, \quad \alpha_1 = \frac{3}{2} = 1.5$$

となる：



続いて、 $C$  の点  $(\alpha_1, \alpha_1^2 - 2) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$  における接線を  $l_2$  とし、 $l_2$  と  $x$  軸との交点を  $(\alpha_2, 0)$  とすると

$$l_2 : y = 3x - \frac{17}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{17}{12} = 1.416\cdots$$

となる. 以下同様に  $l_3, \alpha_3, l_4, \alpha_4, \dots$  を定めると

$$\alpha_3 = \frac{577}{408} = 1.414215\cdots, \quad \alpha_4 = \frac{665857}{470832} = 1.414213562374\cdots, \quad \dots$$

となる. このようにして得られる数列  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  は, 方程式  $x^2 - 2 = 0$  の解である  $\sqrt{2}$  に (右側から) 限りなく近づいて行くことが証明できる. 以上のように, 関数  $y = f(x)$  のグラフの接線を利用して方程式  $f(x) = 0$  の解の近似値を求める方法をニュートン法という.

$d$  を正の整数,  $a$  を正の数とすると,  $f(x) = x^d - a$  にニュートン法を適用すれば  $\sqrt[d]{a}$  の近似値を求めることができる. その際には, 曲線  $y = x^d - a$  の点  $(\alpha, \alpha^d - a)$  における接線が

$$y = d\alpha^{d-1}(x - \alpha) + \alpha^d - a$$

となることに注意して,  $\alpha_0^d > a$  をみたす  $\alpha_0$  を出発点として

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\alpha_n^d - a}{d\alpha_n^{d-1}}$$

によつて  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  を定めることになる.

### §3 3 の “立方根” の計算 (その 1)

それでは, 前節で見た  $\sqrt{2}$  の計算に倣って, 本来の目標である 3 の “立方根” を求めることにする. まずは一の位を決めよう. “見た目を重視・高い桁は軽視” という価値観に照らし合わせれば,

$$\begin{array}{cccccc} 0^3 = 0, & 1^3 = 1, & 2^3 = 8, & 3^3 = 27, & 4^3 = 64, \\ 5^3 = 125, & 6^3 = 216, & 7^3 = 343, & 8^3 = 512, & 9^3 = 729 \end{array}$$

の中で 3 に “近い” のは, 一の位が 3 となっている  $7^3 = 343$  であると思える. つまり, 一の位は 7 と決定された. 続いて十の位を決めよう. 今度は

$$\begin{array}{cccccc} 7^3 = 343, & 17^3 = 4913, & 27^3 = 19683, & 37^3 = 50653, & 47^3 = 103823, \\ 57^3 = 185193, & 67^3 = 300763, & 77^3 = 456533, & 87^3 = 658503, & 97^3 = 912673 \end{array}$$

の中で下 2 桁が 03 となっている  $87^3 = 658503$  が 3 に “近い” と思える. つまり十の位は 8 である. 同様に

$$\begin{array}{cccccc} 87^3 = \cdots 503, & 187^3 = \cdots 203, & 287^3 = \cdots 903, & 387^3 = \cdots 603, & 487^3 = \cdots 303, \\ 587^3 = \cdots 003, & 687^3 = \cdots 703, & 787^3 = \cdots 403, & 887^3 = \cdots 103, & 987^3 = \cdots 803 \end{array}$$

(下 3 桁以外は省略してある) より, 百の位は 5 となる. このようにして得られるのが冒頭に挙げた整数列

$$7, 8, 5, 4, 3, 1, 5, 9, 8, 7$$

である.

実は, 上の計算はどこまでも続けることができ, 無限整数

$$\cdots 78683312291648481630318492665160423850087895134587$$

が構成できる. こうして得られた無限整数が求める 3 の “立方根” であること, すなわち 3 乗すれば 3 となることを確かめるのは難しくない. しかし, ひとつの桁を決めるために 3 乗の計算を 10 回も行うのは効率が悪い. そこで, 計算を簡約化することを考えよう.

一の位である 7 の計算の簡約化は保留して, 十の位を  $x$  と置くことにする. 目標は

$$(10x + 7)^3 = (10x)^3 + 3(10x)^2 7 + 3(10x) 7^2 + 7^3$$

の下 2 桁が 03 となるような  $x$  を  $0, 1, \dots, 9$  の中から見つけることである. ところが, 100 の倍数である  $(10x)^3$  と  $3(10x)^2 7$  は下 2 桁に寄与しないため,

$$3(10x) 7^2 + 7^3 = 1470x + 343 = 100(14x + 3) + 10(7x + 4) + 3$$

の下 2 桁が 03 となるように, すなわち  $7x + 4$  が 10 の倍数となるように  $x$  を定めればよい. これより直ちに  $x = 8$  となることがわかる. 同様に, 百の位を  $y$  と置くと,

$$(100y + 87)^3 = (100y)^3 + 3(100y)^2 87 + 3(100y) 87^2 + 87^3$$

ならびに

$$3(100y) 87^2 + 87^3 = 2270700y + 658503 = 1000(2270y + 658) + 100(7y + 5) + 3$$

より  $y = 5$  となることがわかる.

以上のような計算法を推し進めるためには, “下  $n$  桁だけに注目して...” あるいは “ $10^n$  の倍数は無視して...” といった状況を表す言葉を用意しておく都合がよい. そこで, そのような概念を定義し, 上で述べた簡約化をニュートン法と結びつけることを考えよう.

## §4 数の合同

正の整数  $m$  と整数  $a, b$  に対し,  $a - b$  が  $m$  で割り切れるとき  $a$  と  $b$  は  $m$  を法<sup>ほう</sup>として合同であるといい, このことを “ $a \equiv b \pmod{m}$ ” と表す. 例えば,  $a$  が偶数ならば  $a \equiv 0 \pmod{2}$  で, 奇数ならば  $a \equiv 1 \pmod{2}$  となる. あるいは, 2 を法として 0 に合同な数とは “ $2k$  の形の数” で, 1 に合同な数とは “ $2k + 1$  の形の数” であるといった方がわかり易いかもしれない.

$a, b$  を 0 以上の整数とするとき,  $a \equiv b \pmod{10}$  とは  $a, b$  の一の位が一致するということの意味する. 同様に,  $a \equiv b \pmod{10^n}$  とは  $a, b$  の下  $n$  桁が一致するということである. 従って, 前節の初めで述べた 3 の “立方根” を求める際の計算は

$$7^3 \equiv 3 \pmod{10}, \quad 87^3 \equiv 3 \pmod{100}, \quad 587^3 \equiv 3 \pmod{1000}$$

と表すことができる.

与えられた法に関する合同関係が次の性質をもつことは容易に確かめられる:

**定理 4.1** (1)  $a \equiv a \pmod{m}$ .

(2)  $a \equiv b \pmod{m}$  ならば  $b \equiv a \pmod{m}$ .

(3)  $a \equiv b \pmod{m}$  かつ  $b \equiv c \pmod{m}$  ならば  $a \equiv c \pmod{m}$ .

次が成り立つことを示すのも難しくない:

**定理 4.2** (1)  $a \equiv a' \pmod{m}$  かつ  $b \equiv b' \pmod{m}$  ならば  $a + b \equiv a' + b' \pmod{m}$ .

(2)  $a \equiv a' \pmod{m}$  かつ  $b \equiv b' \pmod{m}$  ならば  $ab \equiv a'b' \pmod{m}$ .

$m = 2$  の場合, 定理 4.2 は “ $a, b$  の偶奇がわかれば  $a + b$  や  $ab$  の偶奇がわかる” ということの言い換えに過ぎない.  $m = 10^n$  の場合には, 定理 4.2 は ( $a, b$  が 0 以上のとき) “ $a, b$  の下  $n$  桁から  $a + b$  や  $ab$  の下  $n$  桁が求められる” ということを意味している.

**例 4.3**  $n = 0, 1, 2$  に対して  $5^{2^n}$  を計算すると

$$\begin{aligned} 5^{2^0} &= 5^1 = 5 = 1 + 4 = 1 + 2^2, \\ 5^{2^1} &= 5^2 = 25 = 1 + 24 = 1 + 2^3 \cdot 3, \\ 5^{2^2} &= 5^4 = 625 = 1 + 624 = 1 + 2^4 \cdot 39 \end{aligned}$$

となる. これより, 全ての  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対して

$$5^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$$

となることが推測される. そこで, ある  $n$  に対して上の合同式が成り立ったと仮定してみよう. この仮定は

$$5^{2^n} = 1 + 2^{n+2} k$$

となるような整数  $k$  が存在することを意味する. この式の両辺を 2 乗すると, 左辺は

$$(5^{2^n})^2 = 5^{2^n \cdot 2} = 5^{2^{n+1}}$$

となり, 右辺は

$$(1 + 2^{n+2}k)^2 = 1 + 2 \cdot 2^{n+2}k + (2^{n+2}k)^2 = 1 + 2^{n+3}(k + 2^{n+1}k^2)$$

となる. つまり, 上の仮定から  $5^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{2^{n+3}}$ , すなわち仮定の合同式において  $n$  を  $n+1$  で置き換えたものが導けたことになる. 以上の議論により, 上の推測は正しいことがわかる.

**練習問題 4.4** (1)  $n^2 \equiv 2 \pmod{10}$  をみたす整数  $n$  は存在しないことを示せ.

(2)  $n^3 \equiv 2 \pmod{100}$  をみたす整数  $n$  は存在しないことを示せ.

(これらのことから, 2 の “平方根” や “立方根” は存在しないことがわかる.)

## §5 3 の “立方根” の計算 (その 2)

前節で導入した言葉を用いて, 3 の “立方根” の計算法を改めて定式化してみよう. “立方根” の下  $n+1$  桁

$$a_n \cdots a_1 a_0 = 10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0$$

は既に計算されているとし,  $(a_n \cdots a_1 a_0)^3$  の下  $n+1$  桁は  $\overbrace{00 \cdots 0}^n 3$  であるとする:

$$(10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0)^3 \equiv 3 \pmod{10^{n+1}}.$$

いま, “立方根” の  $10^{n+1}$  の位を  $x$  と置くことにする. 目標は

$$\begin{aligned} & (10^{n+1}x + 10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0)^3 \\ &= (10^{n+1}x)^3 + 3(10^{n+1}x)^2(10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0) \\ & \quad + 3(10^{n+1}x)(10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0)^2 + (10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0)^3 \end{aligned}$$

の下  $n+2$  桁が  $\overbrace{00 \cdots 0}^{n+1} 3$  となるような  $x$  を  $0, 1, \dots, 9$  の中から見つけることである. ところが,  $(10^{n+1}x)^3$  と  $3(10^{n+1}x)^2(10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0)$  は下  $n+2$  桁に寄与しない:

$$(10^{n+1}x)^3 \equiv 3(10^{n+1}x)^2(10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0) \equiv 0 \pmod{10^{n+2}}.$$

また,  $10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0 \equiv a_0 \pmod{10}$  であるから

$$(10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0)^2 \equiv a_0^2 \pmod{10}.$$

これより

$$3(10^{n+1}x)(10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0)^2 \equiv 3(10^{n+1}x)a_0^2 \pmod{10^{n+2}}$$

となることがわかる. 従って,  $x$  がみたすべき条件は

$$3(10^{n+1}x)a_0^2 + (10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0)^3 \equiv 3 \pmod{10^{n+2}}$$

となるが, この条件は

$$3a_0^2x \equiv -\frac{(10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0)^3 - 3}{10^{n+1}} \pmod{10}$$

と同値である (仮定より右辺の分数は整数であることに注意せよ). ここで,  $a_0 = 7$  より

$$3a_0^2 = 3 \cdot 49 \equiv 3 \cdot 9 \equiv 27 \equiv 7 \pmod{10}.$$

また

$$3 \cdot 7 = 21 \equiv 1 \pmod{10}, \quad 3 \cdot (-1) = -3 \equiv 7 \pmod{10}.$$

よって,  $10^{n+1}$  の位  $a_{n+1}$  は

$$a_{n+1} \equiv 7 \cdot \frac{(10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0)^3 - 3}{10^{n+1}} \pmod{10}$$

をみたすように定めればよいことがわかる.

**例 5.1** 上で示したことを用いると,  $a_1, a_2, \dots, a_5$  は次のように計算できる:

$$7 \cdot \frac{7^3 - 3}{10} = 7 \cdot 34 \equiv 7 \cdot 4 \equiv 28 \equiv 8 \pmod{10} \quad \text{より } a_1 = 8;$$

$$7 \cdot \frac{87^3 - 3}{100} = 7 \cdot 6585 \equiv 7 \cdot 5 \equiv 35 \equiv 5 \pmod{10} \quad \text{より } a_2 = 5;$$

$$7 \cdot \frac{587^3 - 3}{1000} = 7 \cdot 202262 \equiv 7 \cdot 2 \equiv 14 \equiv 4 \pmod{10} \quad \text{より } a_3 = 4;$$

$$7 \cdot \frac{4587^3 - 3}{10000} = 7 \cdot 9651309 \equiv 7 \cdot 9 \equiv 63 \equiv 3 \pmod{10} \quad \text{より } a_4 = 3;$$

$$7 \cdot \frac{34587^3 - 3}{100000} = 7 \cdot 413750643 \equiv 7 \cdot 3 \equiv 21 \equiv 1 \pmod{10} \quad \text{より } a_5 = 1.$$

以上の議論を一般化すれば, 次の定理が得られる:

**定理 5.2**  $d$  を 10 と互いに素な正の整数,  $a$  を 10 と互いに素な整数とすると,  $a \equiv a_0^d \pmod{10}$  をみたす  $a_0 (= 1, 3, 7, 9)$  が存在する. また,  $a_1, a_2, a_3, \dots (= 0, 1, \dots, 9)$  を

$$da_0^{d-1}a_{n+1} \equiv -\frac{(10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0)^d - a}{10^{n+1}} \pmod{10}$$

により定めると,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  に対して

$$(10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0)^d \equiv a \pmod{10^{n+1}}$$

が成り立つ. さらに, このような  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  は一意的である.

上の定理は、無限整数

$$\cdots a_3 a_2 a_1 a_0 = \cdots + 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0$$

が  $(\cdots a_3 a_2 a_1 a_0)^d = a$  をみたすということを意味している。ニュートン法で  $\sqrt[d]{a}$  を求める際の漸化式

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\alpha_n^d - a}{d \alpha_n^{d-1}}$$

と定理の漸化式の類似性が見えるだろうか？

## §6 $p$ 進数への道

ここまで見てきたように、無限整数は全ての整数や多くの有理数、さらには通常“無理数”とされる数の一部までも含み、和・差や積が自由に計算できる。実は、このような数の体系は、**整数の 10 進完備化**と呼ばれる由緒正しいものである。しかし、無限整数は

0 でない数同士の積が 0 になることがある

という“数”の名に相応しくない欠点をもっている。本節では、この事実を観察し、欠点を克服する方法を考察する。

“見た目を重視・高い桁は軽視”と唱えながら 2 乗の繰り返し

$$\begin{array}{rcl} 5^1 & = & \underline{5} \\ \downarrow 2 \text{ 乗} & & \\ 5^2 & = & \underline{25} \\ \downarrow 2 \text{ 乗} & & \\ 5^4 & = & \underline{625} \\ \downarrow 2 \text{ 乗} & & \\ 5^8 & = & \underline{390625} \\ \downarrow 2 \text{ 乗} & & \\ 5^{16} & = & \underline{152587890625} \end{array}$$

を見ると、ある無限整数に徐々に近づいて行くように思えてくる。実際、例 4.3 で示したことを用いると、上の計算において

下 1 桁は全て 5;

初めの 5 を除いて下 2 桁は全て 25;

初めの 5, 25 を除いて下 4 桁は全て 0625;

初めの 5, 25, 625 を除いて下 5 桁は全て 90625;

初めの 5, 25, 625, 390625 を除いて下 6 桁は全て 890625

となっていることが証明できる:

定理 6.1

$$5 \equiv 5^2 \equiv 5^4 \equiv 5^8 \equiv \dots \pmod{10},$$

$$5^2 \equiv 5^4 \equiv 5^8 \equiv 5^{16} \equiv \dots \pmod{100}.$$

また,  $n = 2, 3, 4, \dots$  に対して

$$5^{2^n} \equiv 5^{2^{n+1}} \equiv 5^{2^{n+2}} \equiv 5^{2^{n+3}} \equiv \dots \pmod{10^{n+2}}.$$

上の計算を続けると, “極限值”

$$\dots 57423423230896109004106619977392256259918212890625$$

を得ることができる. 5 に 2 乗を  $n$  回繰り返したものは  $5^{2^n}$  であるから, この無限整数を  $5^{2^\infty}$  と書くことにしよう. さて,  $(5^{2^n})^2 = 5^{2^{n+1}}$  において強引に  $n = \infty$  として, さらに  $\infty + 1 = \infty$  と思うことにすると,  $(5^{2^\infty})^2 = 5^{2^\infty}$  という等式が得られる. 実は, この議論は正当化することができる.  $5^{2^\infty}$  は方程式  $x^2 = x$  の解となる. 通常の価値観では  $x^2 = x$  の解は 0, 1 に限る訳であるから, 新しい価値観に慣れた人であっても, このことは奇妙に感じられるかもしれない.

気分を変えるために  $5^{2^\infty}$  を  $\alpha$  と書くことにし,  $\beta = 1 - \alpha$  と置く. このとき,  $\beta$  も  $x^2 = x$  の解となる:

$$\beta^2 = (1 - \alpha)^2 = 1 - 2\alpha + \alpha^2 = 1 - 2\alpha + \alpha = 1 - \alpha = \beta.$$

また,  $\alpha$  と  $\beta$  は, どちらも 0 ではないが, 積は 0 となる:

$$\alpha\beta = \alpha(1 - \alpha) = \alpha - \alpha^2 = \alpha - \alpha = 0.$$

$\alpha + \beta = 1$  と  $\alpha\beta = 0$  は, 2 次方程式  $x^2 = x$  の解  $\alpha, \beta$  がみたす “解と係数の関係” であると見なせる. なお,  $\beta$  の無限整数表示を求めるためには  $1 - 5^{2^\infty}$  の計算を実行すればよい:

$$\begin{array}{r} 999999999 \\ 1 \\ - \dots 8212890625 \\ \hline \dots 1787109376 \end{array}$$

ここに現れた 2 つの数値は, 冒頭で紹介した The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences でも

$$x^2 = x \text{ をみたす } 10 \text{ 進整数 (The 10-adic integer } x \text{ satisfying } x^2 = x)$$

として登録されている.

注意 6.2 方程式  $x^2 = x$  の無限整数解は  $0, 1, 5^{2^\infty}, 1 - 5^{2^\infty}$  の 4 つに限る. 実際,

$$\begin{array}{l} 0^2 \equiv 0 \pmod{10}, \quad 1^2 \equiv 1 \pmod{10}, \quad 2^2 \equiv 4 \pmod{10}, \quad 3^2 \equiv 9 \pmod{10}, \\ 4^2 \equiv 16 \equiv 6 \pmod{10}, \quad 5^2 \equiv 25 \equiv 5 \pmod{10}, \quad 6^2 \equiv 36 \equiv 6 \pmod{10}, \\ 7^2 \equiv 49 \equiv 9 \pmod{10}, \quad 8^2 \equiv 64 \equiv 4 \pmod{10}, \quad 9^2 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{10} \end{array}$$

より解の一の位は  $0, 1, 5, 6$  のいずれかで, これらに対して十の位, 百の位, 千の位, ... を求めれば  $0, 1, 5^{2^\infty}, 1 - 5^{2^\infty}$  が得られる.

“0 でない数同士の積が 0 になる” という現象が観察された以上, 無限整数の割り算を自由に行うことは諦めなくてはならない. この現象の原因を探ると,

10 は 2 と 5 の積に分解される

ことが元凶であることがわかる. 2 で割り切れない  $5^{2^n}$  と 5 で割り切れない  $1 - 5^{2^n}$  は, 我々の価値観では共に 10 で割り切れない “大きい” 数である. 他方,  $5^{2^n}(1 - 5^{2^n})$  は  $2^{n+2}5^{2^n}$  で割り切れる極めて “小さい” 数である. これらの事実が極限に至って  $5^{2^\infty} \neq 0, 1 - 5^{2^\infty} \neq 0$  ならびに  $5^{2^\infty}(1 - 5^{2^\infty}) = 0$  になると見なせるからである.

素数  $p$  をひとつ固定して, 整数は (10 進法ではなく)  $p$  進法で表記することにした上で無限整数を考えれば, 上のような奇妙な現象は起きないことが示せる. このようにして得られる数を  $p$  進整数と呼び,  $p$  進整数から作られる分数を  $p$  進数と呼ぶ. 整数や有理数のことを研究する際に, 通常の意味での完備化である実数だけでなく, 各素数  $p$  に関する完備化を考え, それらを全て利用するというのが現代の整数論の標準的な手法である.

## 文献案内

本稿で述べたような話に興味がある人には, 続けて

加藤文元,  $p$ -進数の世界, 数学文化 第 8 号 (2007 年), 日本評論社, pp. 39–47

を読むことをお勧めする. また

上野健爾, 数学者的思考トレーニング 代数編, 岩波書店, 2010 年

の第 2 章と第 3 章には,  $p$  進数の話が易しく述べられている.