離散数学入門*

佐藤 篤†

目 次

---

*数学 (2018–2019 年度, 於 仙台白百合女子大学) 講義ノートに加筆修正 [2022 年 3 月 14 日版]

†東北学院大学教養学部 (E-mail: `atsushi@mail.tohoku-gakuin.ac.jp`)

1　フィボナッチ数

1, 1 から始まって

2 つ前の数と 1 つ前の数を足し合わせる

という規則で構成される数

$$1,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 8,\quad 13,\quad 21,\quad 34,\quad 55,\quad \ldots$$

を**フィボナッチ数**という. n 番目のフィボナッチ数を f_n と置くと, 上で述べた構成法は

$$f_1 = 1, \qquad f_2 = 1, \qquad f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$$

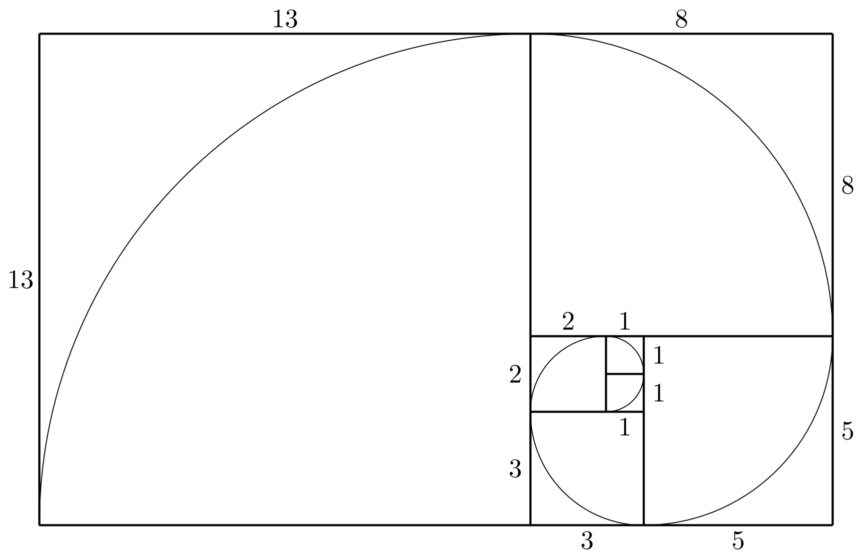
と表すことができる. 実際, 最後の等式において $n = 3$ とすれば 3 番目のフィボナッチ数が

$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$$

と計算され, $n = 4$ とすれば 4 番目のフィボナッチ数が

$$f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$$

と計算される. 上の関係式からわかるように, 一辺が $f_1, f_2, f_3, \ldots$ であるような正方形を下図のように組んで行けば, 縦横が $f_1 \times f_2$, $f_2 \times f_3$, $f_3 \times f_4$, $\ldots$ であるような長方形が得られる:



上図の曲線 (四分円を結んだもの) はフィボナッチの螺旋と呼ばれる.

フィボナッチ数は, 植物の葉が出てくる規則やヒマワリの種のつき方, パイナップルの実のつき方などにも現れることが知られている. 本節では, 連続した 3 個のフィボナッチ数や連続した 4 個のフィボナッチ数の間に成り立つ関係式を示し, n 番目のフィボナッチ数を明示的に表す公式を導く.

フィボナッチ数

$$f_1 = 1,\quad f_2 = 1,\quad f_3 = 2,\quad f_4 = 3,\quad f_5 = 5,\quad f_6 = 8,\quad f_7 = 13,\quad f_8 = 21,\quad f_9 = 34,\quad f_{10} = 55,\quad \ldots$$

の連続した 3 個 $f_n,\, f_{n+1},\, f_{n+2}$ について, $f_n\, f_{n+2} - f_{n+1}^2$ を計算してみると

$$\begin{aligned} f_1 f_3 - f_2^2 &= 1 \cdot 2 - 1^2 = 1, \\ f_2 f_4 - f_3^2 &= 1 \cdot 3 - 2^2 = -1, \\ f_3 f_5 - f_4^2 &= 2 \cdot 5 - 3^2 = 1, \\ f_4 f_6 - f_5^2 &= 3 \cdot 8 - 5^2 = -1 \end{aligned}$$

と 1 と -1 が交互に現れる. 一般の n に対しても,

$$\begin{aligned} f_{n+1}\, f_{n+3} - f_{n+2}^2 &= f_{n+1}(f_{n+1} + f_{n+2}) - f_{n+2}^2 \\ &= f_{n+1}^2 - (f_{n+2} - f_{n+1}) f_{n+2} \\ &= f_{n+1}^2 - f_n\, f_{n+2}, \end{aligned}$$

すなわち

$$f_{n+1}\, f_{n+3} - f_{n+2}^2 = -(f_n\, f_{n+2} - f_{n+1}^2)$$

より,

$$f_n\, f_{n+2} - f_{n+1}^2 = (-1)^{n-1}$$

が成り立つことがわかる.

連続した 4 個 $f_n,\, f_{n+1},\, f_{n+2},\, f_{n+3}$ についても, $f_n\, f_{n+3} - f_{n+1}\, f_{n+2}$ を計算してみると, ここでも

$$\begin{aligned} f_1 f_4 - f_2 f_3 &= 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1, \\ f_2 f_5 - f_3 f_4 &= 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = -1, \\ f_3 f_6 - f_4 f_5 &= 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 1, \\ f_4 f_7 - f_5 f_6 &= 3 \cdot 13 - 5 \cdot 8 = -1 \end{aligned}$$

と 1 と -1 が交互に現れる. 一般の n に対しても,

$$\begin{aligned} f_{n+1}\, f_{n+4} - f_{n+2}\, f_{n+3} &= f_{n+1}(f_{n+2} + f_{n+3}) - f_{n+2}\, f_{n+3} \\ &= f_{n+1}\, f_{n+2} - (f_{n+2} - f_{n+1}) f_{n+3} \\ &= f_{n+1}\, f_{n+2} - f_n\, f_{n+3}, \end{aligned}$$

すなわち

$$f_{n+1}\, f_{n+4} - f_{n+2}\, f_{n+3} = -(f_n\, f_{n+3} - f_{n+1}\, f_{n+2})$$

より,

$$f_n\, f_{n+3} - f_{n+1}\, f_{n+2} = (-1)^{n-1}$$

が成り立つことがわかる.

2 次方程式 $x^2 = 1 + x$, すなわち $x^2 - x - 1 = 0$ の解は, 解の公式より

$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

により与えられる. そこで

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

と置くと, 解と係数の関係より

$$\phi + \psi = 1, \qquad \phi\psi = -1$$

がわかる (直接計算して確かめてもよい). また

$$\phi - \psi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

いま, $g_1, g_2, g_3, \dots$ を

$$g_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi}$$

により定める. 例えば

$$g_1 = \frac{\phi - \psi}{\phi - \psi} = 1, \qquad g_2 = \frac{\phi^2 - \psi^2}{\phi - \psi} = \phi + \psi = 1.$$

また

$$g_3 = \frac{\phi^3 - \psi^3}{\phi - \psi} = \phi^2 + \phi\psi + \psi^2 = (\phi+\psi)^2 - \phi\psi = 1^2 - (-1) = 2,$$

$$g_4 = \frac{\phi^4 - \psi^4}{\phi - \psi} = \phi^3 + \phi^2\psi + \phi\psi^2 + \psi^3 = (\phi+\psi)^3 - 2\phi\psi(\phi+\psi) = 1^3 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 = 3.$$

さて, ϕ と ψ は方程式 $x^2 = 1 + x$ の解であるから, $\phi^2 = 1 + \phi$ と $\psi^2 = 1 + \psi$ をみたす. 従って

$$\phi^n - \psi^n = \phi^{n-2}\,\phi^2 - \psi^{n-2}\,\psi^2 = \phi^{n-2}(1+\phi) - \psi^{n-2}(1+\psi) = (\phi^{n-2} - \psi^{n-2}) + (\phi^{n-1} - \psi^{n-1})$$

となり, これより

$$\frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi} = \frac{\phi^{n-2} - \psi^{n-2}}{\phi - \psi} + \frac{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\phi - \psi},$$

すなわち

$$g_n = g_{n-2} + g_{n-1}$$

がわかる. つまり, フィボナッチ数を構成する際に用いられた規則である

$$f_1 = 1, \qquad f_2 = 1, \qquad f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$$

を $g_1, g_2, g_3, \dots$ もみたしている. よって, 全ての n について $g_n = f_n$ が成り立つことになり, n 番目のフィボナッチ数を表す公式が得られる:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

2　互除法と連分数 I

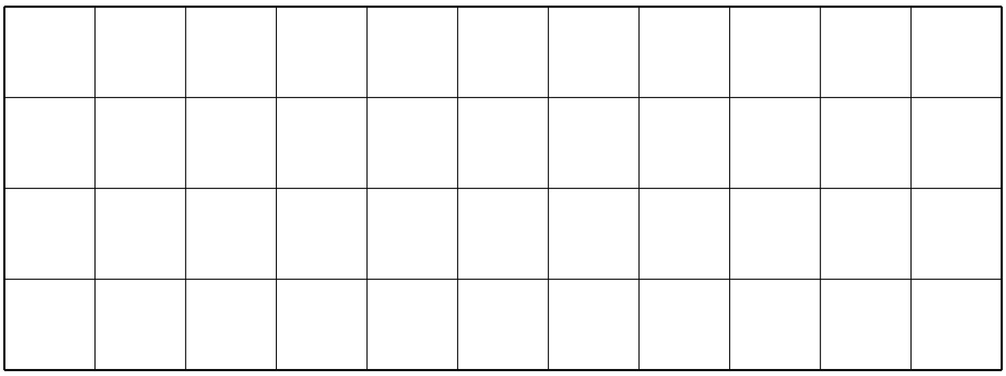
縦横が 48×132 であるような長方形の床に, 同じ大きさの正方形のタイルを隙間なく敷き詰めることを考える. このとき, タイルの一辺は最大でいくつにできるだろうか?

よく知られているように, この問題を解くためには 48 と 132 の最大公約数を求めればよい. すなわち, 素因数分解

$$48 = 2^4 \cdot 3, \qquad 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$$

より, 48 と 132 の最大公約数は $2^2 \cdot 3 = 12$ であることがわかるから, 求める長さは 12 である.

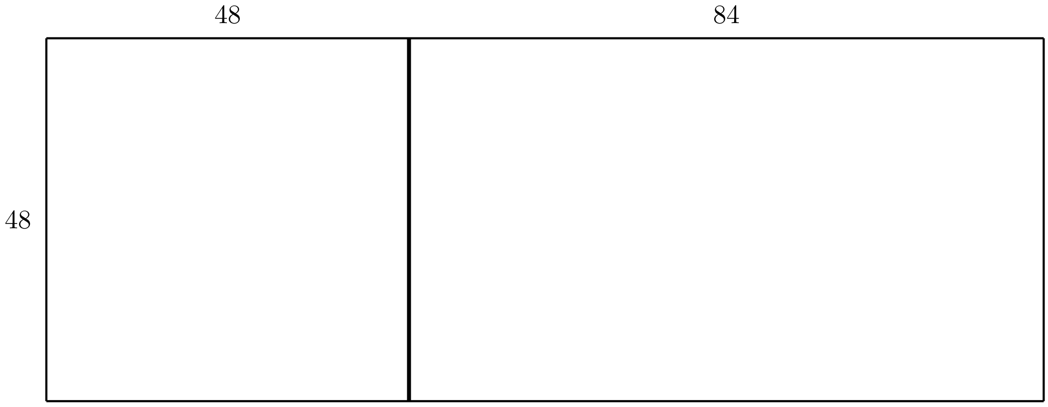
さて, 床は 12×12 のタイルによって次のように敷き詰められる:



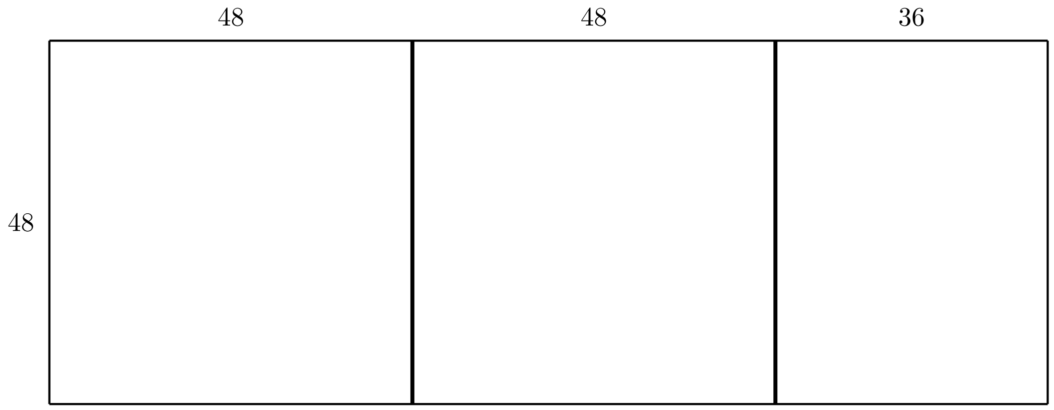
上では 48 と 132 の最大公約数を素因数分解を利用して求めたが, この図を元にして次のように考えてみる:

(1) いま, 床が $d \times d$ のタイルによって隙間なく敷き詰められたとする. タイルは縦に $\frac{48}{d}$ 枚, 横に $\frac{132}{d}$ 枚敷き詰められていることになる.

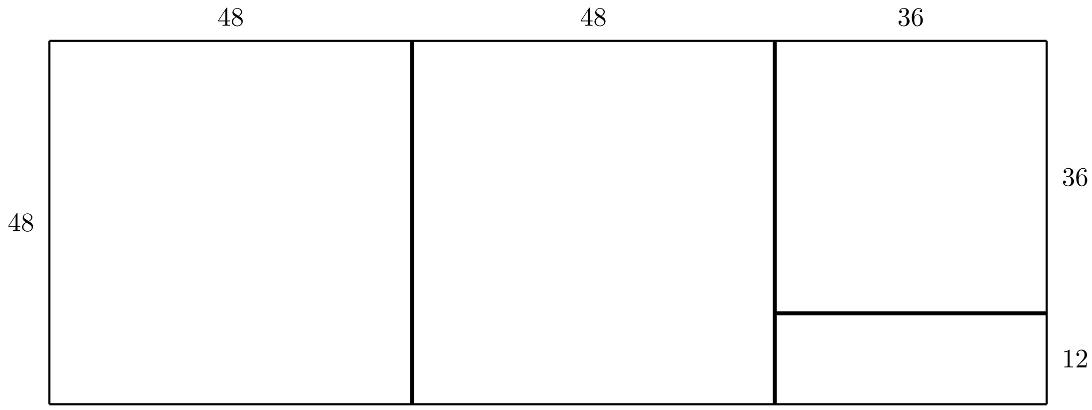
(2) このとき, 左側の 48×48 の部分には, 縦横 $\frac{48}{d}$ 枚ずつタイルが敷き詰められていることになる. 従って, 左から 48 の所には目地の線が縦に現れるはずである:



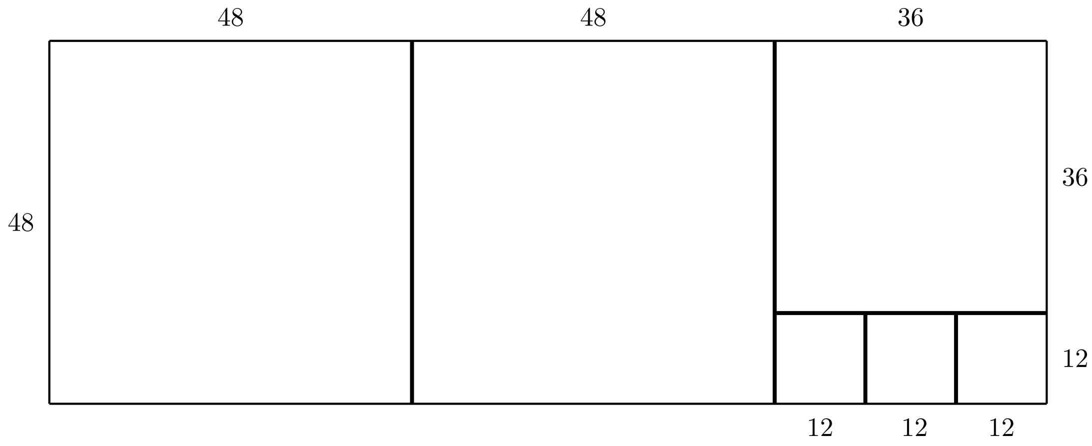
(3) 上の図において, 右側の 48×84 の部分には, タイルが縦に $\frac{48}{d}$ 枚, 横に $\frac{84}{d}$ 枚敷き詰められている. 従って, (2) と同様の理由により, この長方形の左から 48 の所には目地の線が縦に現れるはずである:



(4) 上の図において, 右側の 48×36 の部分には, タイルが縦に $\frac{48}{d}$ 枚, 横に $\frac{36}{d}$ 枚敷き詰められている. 従って, (2) や (3) と同様の理由により, この長方形の上から 36 の所には目地の線が横に現れるはずである:



(5) 上の図において, 右下の 12×36 の部分には, タイルが縦に $\frac{12}{d}$ 枚, 横に $\frac{36}{d}$ 枚敷き詰められている. 従って, これまでと同じ理由により, この長方形の左から 12 の所と 24 の所には目地の線が縦に現れるはずである:



(6) 上の図において, 床は (大きさの異なる) 正方形で埋めつくされている. また, ここまでの議論より, $\frac{132}{d}$, $\frac{84}{d}$, $\frac{48}{d}$, $\frac{36}{d}$ ならびに $\frac{12}{d}$ はいずれも整数でなければならない (他方, d は整数でなくても構わない). これより特に $d \leq 12$ でなければならないことがわかる.

(7) ところで, 上で行った計算は

$$\begin{aligned} 132 \div 48 &= 2 \cdots 36, \\ 48 \div 36 &= 1 \cdots 12, \\ 36 \div 12 &= 3 \cdots 0, \end{aligned}$$

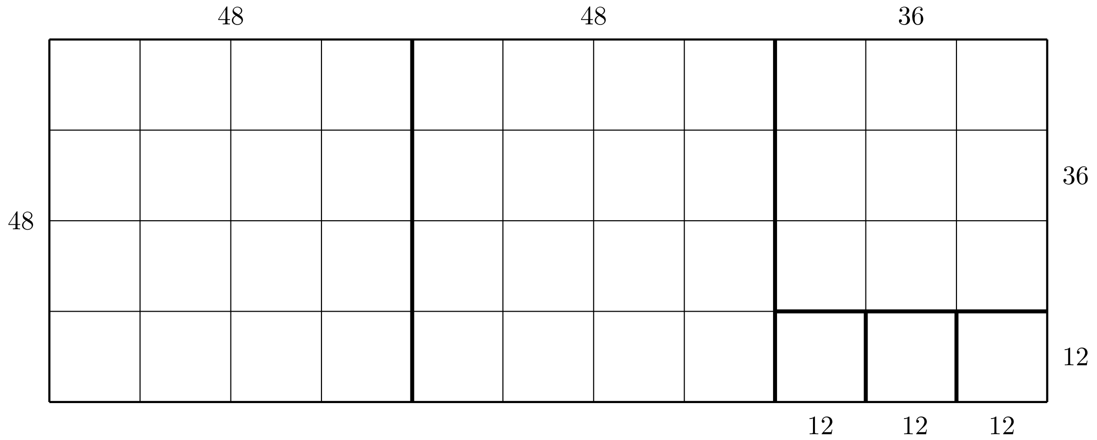
すなわち

$$\begin{aligned} 132 &= 48 \cdot 2 + 36, \\ 48 &= 36 \cdot 1 + 12, \\ 36 &= 12 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

とまとめることができる. 後者の計算を下から順に見ていくと,

$$\begin{aligned} 36 &= 12 \cdot 3, \\ 48 &= (12 \cdot 3) \cdot 1 + 12 = 12 \cdot (3+1) = 12 \cdot 4, \\ 132 &= (12 \cdot 4) \cdot 2 + 12 \cdot 3 = 12 \cdot (8+3) = 12 \cdot 11 \end{aligned}$$

となることがわかり, これより 48 と 132 は共に 12 の倍数であることがわかる. 従って, 床は 12×12 のタイルで隙間なく敷き詰めることができる:



(8) 以上により, 12 が 48 と 132 の最大公約数であることがわかる.

上のようにして最大公約数を求める方法を**ユークリッドの互除法**という. 肝心なのは図ではなく, "余りのある割り算" を, 割られる数と割る数を替えながら繰り返すことである. 割り算を繰り返せば余りは徐々に小さくなり, やがて 0 となるが, そのときの割る数が最大公約数となる. 例えば, 255 と 476 の最大公約数は

$$\begin{aligned} 476 \div 255 &= 1 \cdots 221, \\ 255 \div 221 &= 1 \cdots 34, \\ 221 \div \ 34 \ &= 6 \cdots 17, \\ 34 \div \ 17 \ &= 2 \cdots 0 \end{aligned}$$

から 17 であることがわかる.

さて, さきほどの計算は

$$\begin{array}{ccccc} 132 = 48\cdot 2 + 36 & \xrightarrow{\div 12} & 11 = 4\cdot 2 + 3 & \xrightarrow{\div 4} & \dfrac{11}{4} = 2 + \dfrac{3}{4} \\ 48 = 36\cdot 1 + 12 & \xrightarrow{\div 12} & 4 = 3\cdot 1 + 1 & \xrightarrow{\div 3} & \dfrac{4}{3} = 1 + \dfrac{1}{3} \end{array}$$

のように変形できる. これより, $\frac{132}{48} = \frac{11}{4}$ は

$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{3}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}$$

と表せることがわかる. 同様に考えることにより, $\frac{476}{255} = \frac{28}{15}$ は

$$\frac{28}{15} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2}}}$$

と表せることもわかる.

一般に

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$$

のような形の分数を**連分数**という. 任意の有理数は, 分母と分子にユークリッドの互除法を適用すれば, 連分数で表すことができる. 逆に, 連分数で表された数は, 通分を繰り返せば通常の分数で表すことができる. 例えば

$$1 = \frac{1}{1}, \qquad 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}, \qquad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \qquad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

これらはフィボナッチ数

$$f_1 = 1,\ \ f_2 = 1,\ \ f_3 = 2,\ \ f_4 = 3,\ \ f_5 = 5,\ \ f_6 = 8,\ \ f_7 = 13,\ \ f_8 = 21,\ \ f_9 = 34,\ \ f_{10} = 55,\ \ \ldots$$

の連続した 2 個 f_n, f_{n+1} の比 $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ に一致している:

$$\frac{1}{1} = \frac{f_2}{f_1}, \qquad \frac{2}{1} = \frac{f_3}{f_2}, \qquad \frac{3}{2} = \frac{f_4}{f_3}, \qquad \frac{5}{3} = \frac{f_5}{f_4}.$$

一般の n に対しても,

$$1 + \frac{1}{\frac{f_{n+1}}{f_n}} = 1 + \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_n + f_{n+1}}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$$

より,

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

(左辺にある $+$ の個数は $n-1$) が成り立つことがわかる.

3　互除法と連分数 II

前節で述べたように, $\frac{11}{4}$ $(= \frac{132}{48})$ の連分数表示を求めるためには

$$11 \div 4 = 2 \cdots 3, \qquad 4 \div 3 = 1 \cdots 1, \qquad 3 \div 1 = 3 \cdots 0$$

と割り算を繰り返せばよい. 商である $2, 1, 3$ を

$$\frac{11}{4} = \underline{2} + \cfrac{1}{\underline{1} + \cfrac{1}{\underline{3}}}$$

の下線部のように配置すれば, 連分数表示が得られる訳である.

さて, これも前節で述べたように, 上の計算は

$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}, \qquad \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}, \qquad \frac{3}{1} = 3 + 0$$

と変形できる. このとき, 商 $2, 1, 3$ とは $\frac{11}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{1}$ の整数部分である. また, $\frac{4}{3}$ とは $\frac{11}{4}$ の小数部分 $\frac{3}{4}$ の逆数であり, $\frac{3}{1}$ とは $\frac{4}{3}$ の小数部分 $\frac{1}{3}$ の逆数である. つまり, この計算は

$$\frac{11}{4} = 2.75 = 2 + 0.75, \qquad \frac{1}{0.75} = 1.333\cdots = 1 + 0.333\cdots, \qquad \frac{1}{0.333\cdots} = 3 = 3 + 0$$

のように書くこともできる.

上で述べた計算法のうち, 最後の方法に従えば, 有理数とは限らない数に対しても同様の手順を適用することができる. 例えば, $\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ に対して適用すれば

$$\begin{aligned}
1.41421356\cdots &= 1 + 0.41421356\cdots, \\
\frac{1}{0.41421356\cdots} &= 2.4142135\cdots = 2 + 0.4142135\cdots, \\
\frac{1}{0.4142135\cdots} &= 2.414213\cdots = 2 + 0.414213\cdots, \\
\frac{1}{0.414213\cdots} &= 2.41421\cdots = 2 + 0.41421\cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

と "商" $1, 2, 2, 2, \ldots$ が得られる. また, 円周率 $\pi = 3.14159265\cdots$ に対して適用すれば

$$\begin{aligned}
3.14159265\cdots &= 3 + 0.14159265\cdots, \\
\frac{1}{0.14159265\cdots} &= 7.06251\cdots = 7 + 0.06251\cdots, \\
\frac{1}{0.06251\cdots} &= 15.99\cdots = 15 + 0.99\cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

と "商" $3, 7, 15, \ldots$ が得られる. このような計算で得られた "商" にはどのような意味があるのだろうか?

話を連分数に戻そう．$\sqrt{2}$ から得られた "商" $1, 2, 2, 2$ からは

$$1, \qquad 1+\frac{1}{2}, \qquad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}, \qquad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$$

という連分数を作ることができる．これらを通常の分数で表した上で小数表示を求めれば

$$\frac{1}{1}=1, \qquad \frac{3}{2}=1.5, \qquad \frac{7}{5}=1.4, \qquad \frac{17}{12}=1.4166\cdots$$

のように，$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ に "近い" 有理数となっていることがわかる．また，π から得られた "商" $3, 7, 15$ からは

$$3, \qquad 3+\frac{1}{7}, \qquad 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}$$

という連分数を作ることができて，これらも

$$\frac{3}{1}=3, \qquad \frac{22}{7}=3.1428\cdots, \qquad \frac{333}{106}=3.141509\cdots$$

のように $\pi=3.14159265\cdots$ に "近い" 有理数となっている．一般の実数 α に対しても，

$$\begin{aligned}
\alpha &= k_1+\alpha_1 &\qquad &(k_1 \text{ は整数}, 0 \leq \alpha_1 < 1),\\
\frac{1}{\alpha_1} &= k_2+\alpha_2 &\qquad &(k_2 \text{ は整数}, 0 \leq \alpha_2 < 1),\\
\frac{1}{\alpha_2} &= k_3+\alpha_3 &\qquad &(k_3 \text{ は整数}, 0 \leq \alpha_3 < 1),\\
\frac{1}{\alpha_3} &= k_4+\alpha_4 &\qquad &(k_4 \text{ は整数}, 0 \leq \alpha_4 < 1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

により "商" $k_1, k_2, k_3, k_4, \ldots$ を定めて，連分数

$$k_1=\frac{p_1}{q_1}, \qquad k_1+\frac{1}{k_2}=\frac{p_2}{q_2}, \qquad k_1+\cfrac{1}{k_2+\cfrac{1}{k_3}}=\frac{p_3}{q_3}, \qquad k_1+\cfrac{1}{k_2+\cfrac{1}{k_3+\cfrac{1}{k_4}}}=\frac{p_4}{q_4}, \qquad \ldots$$

($\frac{p_n}{q_n}$ は通常の分数で表したもの) を作れば，

$$1=q_1 \leq q_2 < q_3 < q_4 < \cdots, \qquad \left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

ならびに

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \cdots < \alpha < \cdots < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_2}{q_2}$$

が成り立つことが知られている (証明は略)．これらの事実は，$\frac{p_n}{q_n}$ が "分母の大きさの割りには α をよく近似している有理数" であることを意味している．

ところで, さきほど行った $\sqrt{2}$ にまつわる計算は, 小数を用いているため, 計算が進むにつれて誤差が増大することが避けられない (小数の桁数が徐々に短くなっているのは, このような事情による). そこで, 小数を用いないで同じ計算をすることを考える.

まず, $\sqrt{2}$ の整数部分は 1 であるから, 小数部分は $\sqrt{2}-1$ ということになる. 次に, $\sqrt{2}-1$ の逆数

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1=2.41421356\cdots$$

の整数部分は 2 であるから, 小数部分は $(\sqrt{2}+1)-2=\sqrt{2}-1$ となるが, これは $\sqrt{2}$ の小数部分に一致する. 従って, 以下でも同じ計算が繰り返されることになる. つまり, $\alpha=\sqrt{2}$ に対しては

$$k_1=1, \qquad k_2=k_3=k_4=\cdots=2, \qquad \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\cdots=\sqrt{2}-1$$

となる.

同様の計算を $\alpha=\sqrt{3}=1.7320508\cdots$ に対しても行ってみよう. まず, $k_1=1$ であるから $\alpha_1=\sqrt{3}-1$ となる. 次に,

$$\frac{1}{\alpha_1}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}=1.3660254\cdots$$

より, $k_2=1$ と

$$\alpha_2=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\ \left(=\frac{\alpha_1}{2}\right)$$

がわかる. また,

$$\frac{1}{\alpha_2}=\frac{2}{\alpha_1}=\sqrt{3}+1=2.7320508\cdots$$

より, $k_3=2$ と

$$\alpha_3=(\sqrt{3}+1)-2=\sqrt{3}-1\ (=\alpha_1)$$

がわかる. 従って,

$$k_1=k_2=k_4=k_6=\cdots=1, \qquad k_3=k_5=k_7=\cdots=2,$$

ならびに

$$\alpha_1=\alpha_3=\alpha_5=\alpha_7=\cdots=\sqrt{3}-1, \qquad \alpha_2=\alpha_4=\alpha_6=\alpha_8=\cdots=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

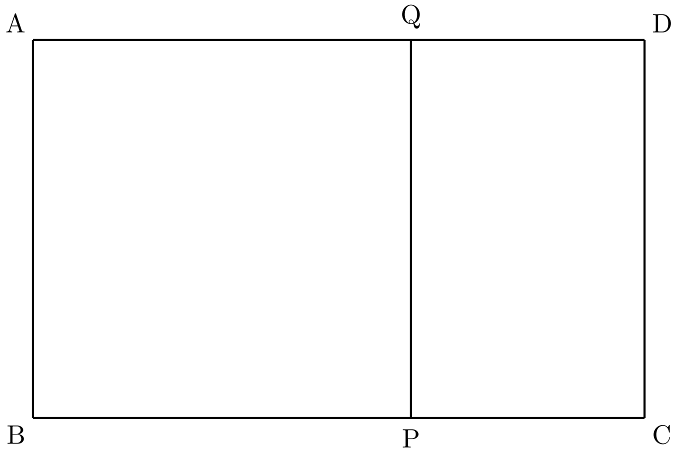
が成り立つ. こうして得られた “商” $1,1,2,1,2,\ldots$ からは

$$1, \qquad 1+\frac{1}{1}, \qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}, \qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}, \qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}, \qquad \ldots$$

という連分数を作ることができる. これらの有理数が実際に $\sqrt{3}$ をよく近似していることを確かめられたい.

4　黄金比と白銀比

下図において, ABCD は長方形, ABPQ は正方形である．また, 右側の長方形 PCDQ は長方形 ABCD と相似, すなわち縦横の比が等しいとする．



このとき, $\mathrm{AB}=m,\ \mathrm{AD}=n$ とすると, $\mathrm{PC}=n-m,\ \mathrm{PQ}=m$ ならびに $\mathrm{PC}:\mathrm{PQ}=m:n$ より

$$\frac{n-m}{m}=\frac{m}{n},$$

すなわち

$$m^2+mn-n^2=0$$

が成り立つ．この等式は

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2-\frac{n}{m}-1=0$$

と変形できるから, $\frac{n}{m}$ は方程式

$$x^2-x-1=0$$

の解となる．この 2 次方程式の解は, 第 1 節で述べたように

$$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180\cdots, \qquad \psi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-0.6180\cdots$$

である．また, m,n は共に正の数であるから, $\frac{n}{m}$ も正である．よって $\frac{n}{m}=\phi$ となる．上で述べた性質をもつ長方形の縦横の比 ϕ を**黄金比**という．

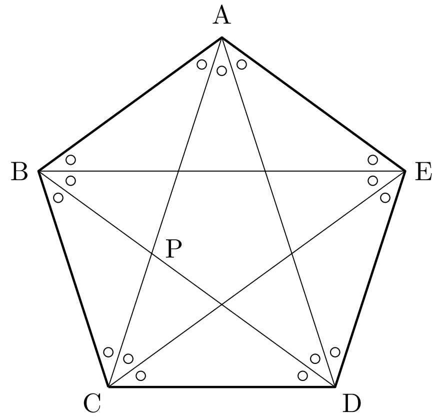
黄金比は次のような表示をもつことも知られている:

$$\phi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}.$$

実際, 機械的な計算により, 上の等式の右辺は 2 次方程式 $x^2-x-1=0$, すなわち $x^2=1+x$ をみたすことが確かめられる:

$$\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}\right)^2=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}.$$

下図において, ABCDE は正五角形である.



容易にわかるように, $\circ$ のついた角は全て 36° である. これより $\triangle$ABP は $\triangle$ACD と相似であることがわかるから, AB : BP = AC : CD. また, $\angle$CPD $= 72^\circ$ がわかるから, PD = CD. 従って, 五角形の一辺の長さを m, 対角線の長さを n とすると, AB $= m$, BP $= n - m$, AC $= n$, CD $= m$ より

$$\frac{m}{n-m} = \frac{n}{m}$$

が成り立つ. よって, さきほどと全く同じ計算により, $\frac{n}{m} = \phi$ となることがわかる.

さて, 黄金比 ϕ の整数部分は 1 であるから, 小数部分は

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = -\psi$$

となる. ここで $\phi\psi = -1$ であるから, 小数部分の逆数 $-\frac{1}{\psi}$ は ϕ に一致する. これより, 黄金比 ϕ に対して第 3 節と同様の計算を行うと

$$k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = 1, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \phi$$

となることがわかる (この事実は冒頭に述べた黄金比の定義から図形的に示すこともできる). こうして得られた "商" $1, 1, 1, \ldots$ からは, 連分数

$$1, \qquad 1 + \frac{1}{1}, \qquad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}, \qquad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}, \qquad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}, \qquad \ldots$$

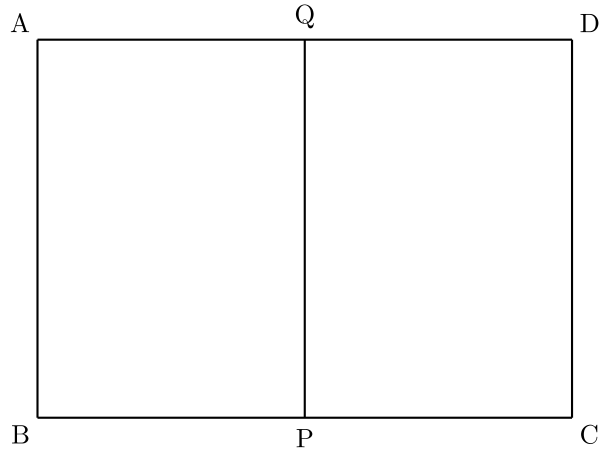
が作れるが, 第 2 節で述べたように, これらはフィボナッチ数の連続した 2 個の比

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{1} = 1, \qquad \frac{f_3}{f_2} = \frac{2}{1} = 2, \qquad \frac{f_4}{f_3} = \frac{3}{2} = 1.5, \qquad \frac{f_5}{f_4} = \frac{5}{3} = 1.66\cdots, \qquad \frac{f_6}{f_5} = \frac{8}{5} = 1.6, \qquad \ldots$$

に一致する. 以上より, $n \to \infty$ としたとき $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ は黄金比 ϕ に収束することがわかる. なお, この事実は第 1 節で示した公式 $f_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi}$ から直接導くこともできる:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\phi^n - \psi^n} = \frac{\phi - \psi\left(\frac{\psi}{\phi}\right)^n}{1 - \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^n} \longrightarrow \phi \qquad (n \to \infty).$$

下図において, ABCD は長方形, P は BC の中点, Q は AD の中点である. また, 左側の長方形 BPQA (あるいは右側の長方形 PCDQ) は長方形 ABCD と相似, すなわち縦横の比が等しいとする.



このとき, $\mathrm{AB} = m,\ \mathrm{AD} = n$ とすると, $\mathrm{BP} = \frac{n}{2},\ \mathrm{BA} = m$ ならびに $\mathrm{BP} : \mathrm{BA} = m : n$ より

$$\frac{n}{2m} = \frac{m}{n},$$

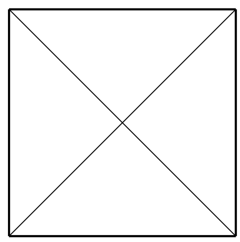
すなわち

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$$

が成り立つ. これより $\frac{n}{m} = \sqrt{2}$ がわかる. 上で述べた性質をもつ長方形の縦横の比 $\sqrt{2}$ を**白銀比**という.

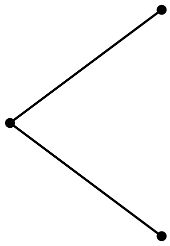
平面図形を $\sqrt{2}$ 倍に (均等に) 拡大すれば面積は倍になり, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に縮小すれば面積は半分になる. コピー機における拡大縮小の倍率で 141% とあるのは $\sqrt{2}$ $(= 1.4142\cdots)$ 倍のことであり, 70% とあるのは $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(= \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071\cdots)$ 倍のことである.

また, 三平方の定理から直ちに示せるように, 正方形の一辺の長さと対角線の長さの比は白銀比 $\sqrt{2}$ に一致する.

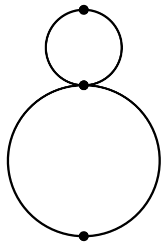


5　一筆書き

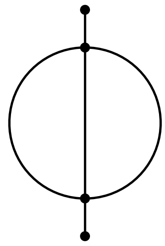
いくつかの点を線で結んだ, 次のような図形を**グラフ**という:



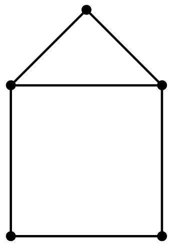
グラフ A



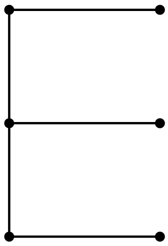
グラフ B



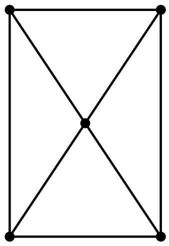
グラフ C



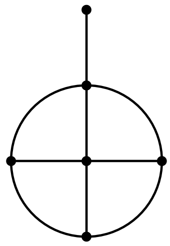
グラフ D



グラフ E



グラフ F

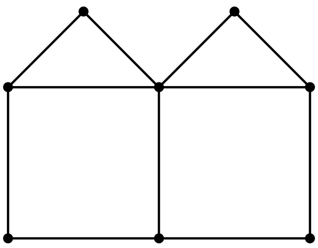


グラフ G

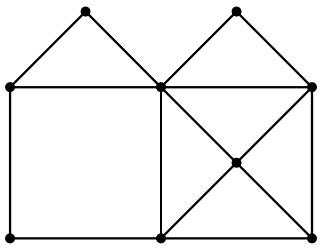
ただし, 点や線の個数は有限であるとする. また, 線の両端は必ず点であるとする. これらの点をグラフの**頂点**といい, 線をグラフの**辺**という. なお, 辺は直線でも曲線でも構わない.

任意の頂点が何個かの辺を介して結ばれているようなグラフは**連結**であるという. 例えば, 上の 7 個のグラフは全て連結であるが, 複数個をまとめてひとつのグラフと見なしたものは連結ではない. 連結なグラフに対し, 全ての辺をちょうど 1 回ずつ通る経路のことを**一筆書き**という. ただし, 始点と終点はいずれも頂点であるとする.

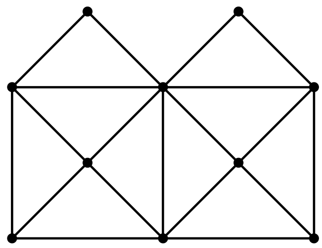
グラフ A, B は明らかに一筆書きができる. また, 容易に確かめられるように, グラフ C, D も一筆書き可能である. 他方, グラフ E, F, G については, 何度試みても一筆書きはできないだろう. 次に挙げるような複雑なグラフとなると, 一筆書きが可能かどうかの判定は一層困難になる:



グラフ H



グラフ I



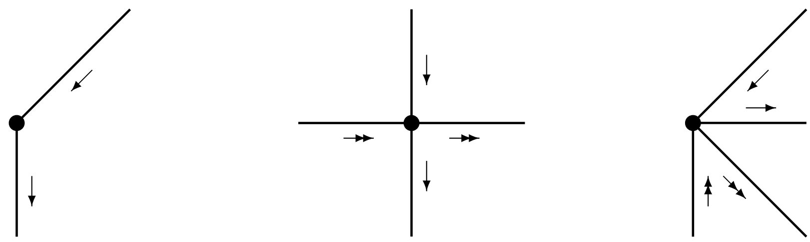
グラフ J

本節では, 与えられた連結なグラフが一筆書き可能かどうか判定する方法, ならびに (可能と判定された場合に) 実際に一筆書きを行う方法について考察する.

グラフの頂点につながっている辺の個数をその頂点の**次数**という. また, 次数が偶数であるような頂点を**偶点**といい, 奇数であるような頂点を**奇点**という. 先に挙げたグラフ A, B, . . . , G の偶点と奇点ならびに辺の個数は次の通りである:

	偶点	奇点	辺
グラフ A	1	2	2
グラフ B	3	0	4
グラフ C	2	2	5
グラフ D	3	2	6
グラフ E	2	4	5
グラフ F	1	4	8
グラフ G	2	4	9

さて, 一筆書きができたグラフにおいては, 始点でも終点でもない頂点は "通過点" であると考えられる:



すなわち, そのような頂点につながっている辺は "入って来る辺" と "出て行く辺" のペアにまとめることができる. これより, 始点と終点以外の点は全て偶点であることが従う. 以上の議論より, 一筆書きができるようなグラフにおいては, 奇点は高々 2 個しか存在しないことがわかる. つまり, 奇点の個数が 2 を超えるようなグラフを一筆書きすることはできない. さらに, 奇点をもつグラフを一筆書きするためには, 奇点を始点か終点にする必要がある.

グラフ E, F, G は, いずれも 4 個の奇点をもつから, 上で述べたことより, 一筆書きできないことが直ちにわかる. また, グラフ H, J も 4 個の奇点をもつから, 一筆書きは不可能である. 他方, グラフ I の奇点は 2 個であるから, 現時点では何とも言えない.

なお, どの辺も 2 つの頂点を結んでいることより, グラフの頂点の次数を全て足し合わせたものは辺の個数の 2 倍に一致することがわかる. このことから, 奇点の個数は常に偶数であることが従う.

ここまでに述べたことより, 連結なグラフが一筆書き可能であれば, その奇点の個数は 0 または 2 であることが示せたことになる. 続いては, その逆が成り立つこと, すなわち奇点が 0 個または 2 個であるような連結なグラフは一筆書き可能であることを示そう.

以下しばらくは, 話が複雑になるのを避けるため, 奇点が 0 個, すなわち全ての頂点が偶点であるような連結なグラフを一筆書きする手順を述べる.

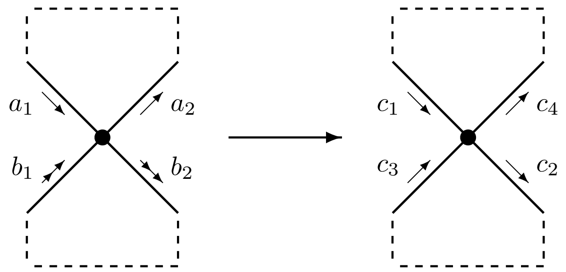
(1) 勝手な頂点を始点として, 始点に戻って来るまで無作為に辺を辿る. ただし, ひとつの辺を通るのは 1 回だけとする. 必ず始点に戻れることは, 全ての頂点が偶点であるという仮定により保証される.

(2) この時点では, グラフの一部が一筆書きできていることになる. この輪状の (8 の字のように途中で交差する部分があっても構わない) 経路を**ループ**と呼ぶことにする.

(3) グラフからループに含まれる辺を取り除き, さらに辺とつながっていない頂点も取り除けば, 新しいグラフが得られる. このグラフは連結とは限らないが, 全ての頂点は偶点のままである.

(4) 得られたグラフに対して, 上と同様の操作を繰り返す. 何回か繰り返せば, グラフの全ての辺と頂点が取り除かれ, そのとき (初めのグラフの) 全ての辺はいくつかのループに分けられている.

(5) 2 つのループが頂点を共有しているとき, 共有されている頂点 (のひとつ) でつないで, ひとつのループにまとめることができる:



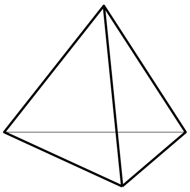
(6) ループをまとめることを繰り返せば, 全てのループをひとつにまとめ上げることができる. そうして得られたループとは, 一筆書きの経路に他ならない.

以上より, 奇点をもたない連結なグラフは, どの点を始点としてどの辺から経路を始めたとしても, 一筆書きできることが示せた. なお, このとき終点は始点と一致している.

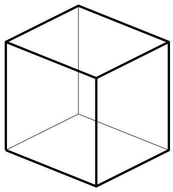
2 個の奇点をもつ連結なグラフは, それら 2 点を結ぶ辺を追加すれば, 奇点をもたないグラフにすることができる. そうして得られたグラフは, 上で示したように一筆書きが可能で, しかも追加した辺から経路を始めることができる. そのような経路から追加した辺を取り除けば, 元のグラフの一筆書きの経路となる. この場合, 始点と終点は共に奇点である.

6　オイラーの多面体定理

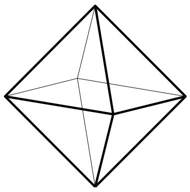
正多面体とは, 全ての面が同一の正多角形で, 各頂点につながっている辺の個数が全て等しい多面体をいう. 正多面体は正四面体, 正六面体 (立方体), 正八面体, 正十二面体, 正二十面体の 5 種類しか存在しないことが知られている.



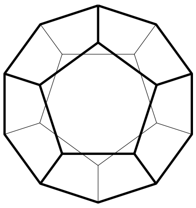
正四面体



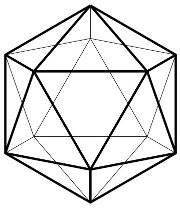
正六面体



正八面体



正十二面体



正二十面体

それぞれの面の個数, 辺の個数, 頂点の個数, 頂点の次数 (つながっている辺の個数) ならびに面の形は次の通りである:

	面の個数	辺の個数	頂点の個数	頂点の次数	面の形
正四面体	4	6	4	3	正三角形
正六面体	6	12	8	3	正方形
正八面体	8	12	6	4	正三角形
正十二面体	12	30	20	3	正五角形
正二十面体	20	30	12	5	正三角形

上の表を見ると, どの正多面体についても

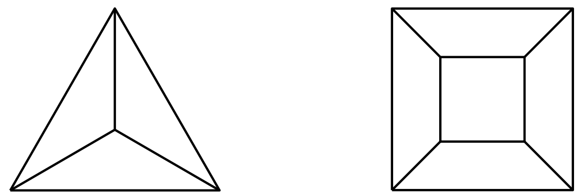
$$\text{(E)} \qquad (\text{面の個数}) - (\text{辺の個数}) + (\text{頂点の個数}) = 2$$

が成り立っていることがわかる. この事実は, 正多面体に限らず, どのような多面体についても成立する. これが表題にある**オイラーの多面体定理**である. 例えば, 三角柱や四角錐 (面は三角形と四角形) に対しても (E) は成り立っている:

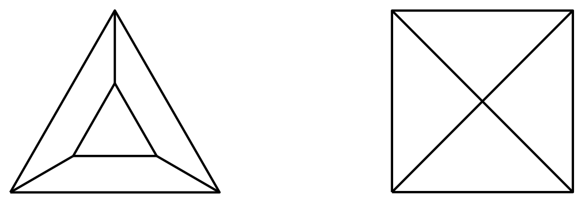
	面の個数	辺の個数	頂点の個数
三角柱	5	9	6
四角錐	5	8	5

本節では, 等式 (E) の証明の概要を紹介し, 上で述べた 5 種類の他に正多面体は存在しないことを示す.

いま, 多面体は伸縮自在な素材で作られていると仮定する. 多面体からひとつの面を取り除き, 他の面を破らないように伸ばして (あるいは縮めて) 平面図形を作ることを考えよう. 例えば, 正四面体や正六面体の底を取り除いて広げれば, 次のような平面図形が得られる:



また, 三角柱や四角錐に対して同様の操作を行えば, 次のような平面図形が得られる:

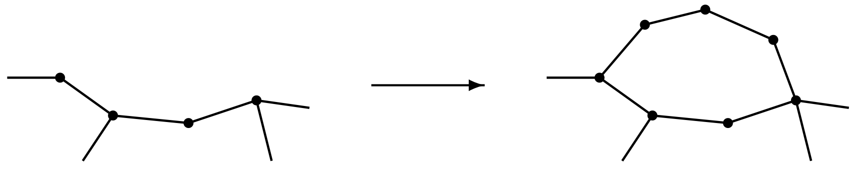


一般の多面体に対しても, 上記のような操作を行えば, 多角形を細分したものが得られる. こうして得られた平面図形は, 面 (細胞状の小さい多角形) の個数は元の多面体よりも 1 だけ少ないが, 辺や頂点の個数は多面体と変わらない. 従って, 多面体に対する等式 (E) を示すためには, (細分された) 多角形に対して

$$(\mathrm{E})^* \qquad (\text{面の個数}) - (\text{辺の個数}) + (\text{頂点の個数}) = 1$$

が成り立つことを示せばよい.

面が 1 個しかない, すなわち細分されていない多角形に対して等式 (E)* は成り立っている. 実際, (細分されていない) m 角形の辺と頂点の個数は共に m であるから, (E)* の左辺は $1-m+m=1$ となる. また, 細分された多角形に辺と頂点を付け加えて面をひとつ増やすとき, 辺が k 個増えたとすれば, 頂点は $k-1$ 個増える. 例えば, 下図では辺は 4 個増え, 頂点は 3 個増えている:



従って, (E)* の左辺は面をひとつ増やしても変化しない. 以上の議論により, 全ての (細分された) 多角形に対して等式 (E)* が成り立つことがわかる.

いま, 正 n 面体が存在したとし, その面は正 m 角形であるとする. また, 各頂点の次数は l であるとする. このとき, ひとつの面は m 個の辺をもち, ひとつの辺は 2 個の面に共有されているから, 辺の個数は $\frac{mn}{2}$ となる. また, ひとつの面は m 個の頂点をもち, ひとつの頂点は l 個の面に共有されているから, 頂点の個数は $\frac{mn}{l}$ となる. 従って, オイラーの多面体定理 (E) より

$$n - \frac{mn}{2} + \frac{mn}{l} = 2$$

が成り立つ. この等式は

$$(2l - lm + 2m)n = 4l$$

と変形できるから, $2l - lm + 2m > 0$ でなければならない. よって,

$$2l - lm + 2m = -(l-2)(m-2) + 4$$

より

$$(l-2)(m-2) < 4$$

がわかる. ここで, l, m は共に 3 以上の整数であるから, 上の不等式をみたす l, m は

$$\begin{cases} l = 3 \\ m = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} l = 3 \\ m = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} l = 4 \\ m = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} l = 3 \\ m = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} l = 5 \\ m = 3 \end{cases}$$

の 5 組に限られる. それぞれの場合について $n, \frac{mn}{2}, \frac{mn}{l}$ を求めると, 次のようになる:

l	m	n	$\frac{mn}{2}$	$\frac{mn}{l}$
3	3	4	6	4
3	4	6	12	8
4	3	8	12	6
3	5	12	30	20
5	3	20	30	12

これらは, それぞれ正四面体, 正六面体, 正八面体, 正十二面体, 正二十面体のデータに他ならない. これで, 他に正多面体は存在しないことが証明できたことになる.

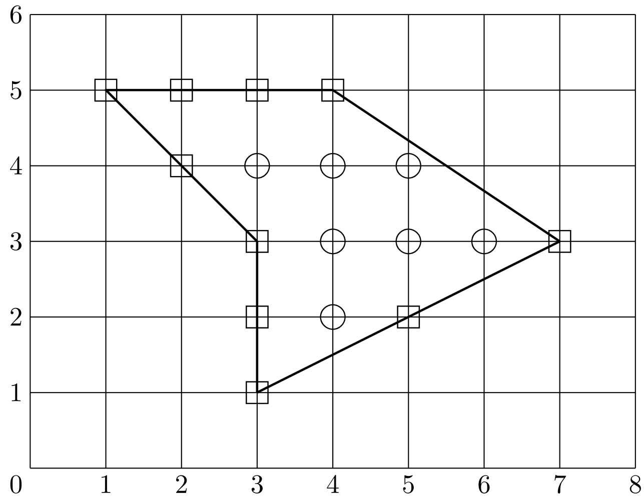
以上の議論では, 5 種類の正多面体が実際に存在することを示した訳ではない. 正四面体, 正六面体, 正八面体が存在することは直ちに示せるが, 正十二面体と正二十面体が実際に存在すること, すなわち 20 個の (同一の) 正五角形や 12 個の正三角形が隙間なく組み上がるということを示すためには, さらなる計算を要する.

7　格子点と面積 I

xy 平面上の点で, x 座標と y 座標が共に整数であるような点を**格子点**という. いま, 格子点

$$(3,1),\quad (7,3),\quad (4,5),\quad (1,5),\quad (3,3)$$

を頂点とする, 下図のような五角形を考える:



この五角形の内部には 7 個の格子点 (○でマークした点) が存在し, 境界上には 10 個の格子点 (□でマークした点) が存在している. また, 五角形の面積が 11 であることを確かめるのは難しくない.

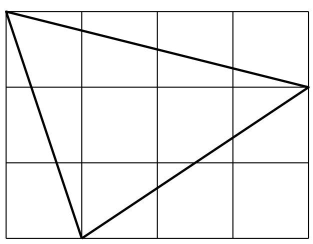
一般に, 格子点を頂点とする多角形に対して, 内部にある格子点の個数を I, 境界上にある格子点の個数を B とし, 多角形の面積を S とすると

(P)
$$S = I + \frac{B}{2} - 1$$

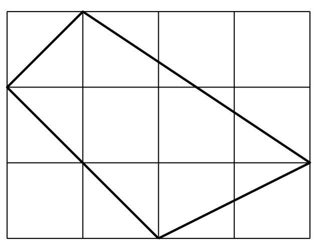
が成り立つことが知られている. 上で挙げた五角形の場合には $I = 7,\ B = 10$ であるから, その面積は (P) を利用して

$$7 + \frac{10}{2} - 1 = 11$$

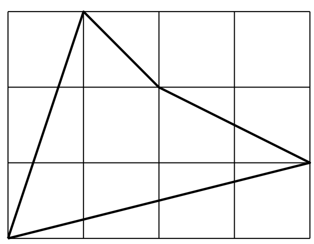
と計算しても求められることになる. 次の多角形について (P) が成り立っていることも容易に確かめられる:



$I = 5,\ B = 3,\ S = \frac{11}{2}$



$I = 4,\ B = 5,\ S = \frac{11}{2}$

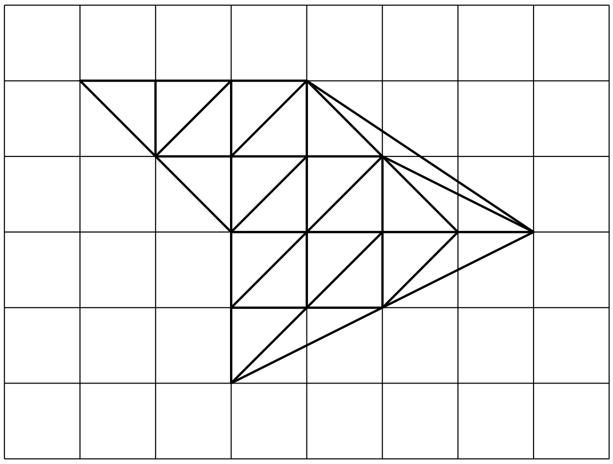


$I = 4,\ B = 4,\ S = 5$

等式 (P) を**ピックの公式**という. 本節と次節では, 前節で示した等式 (E)*, すなわちオイラーの多面体定理 (E) の多角形版を利用して, ピックの公式を証明する.

以下しばらくは, ピックの公式 (P) が成り立つ理由を冒頭に挙げた五角形を通して考察していくことにする.

いま, 下図のように五角形を “頂点のみを格子点とする三角形” に細分する:



この細分された五角形の面 (小さい三角形) の個数を F, 辺の個数を E, 頂点の個数を V と置く. 実際に数えてみれば, $F = 22,\ E = 38,\ V = 17$ となっていることがわかるが, これらを格子点の個数から計算によって求めることを考えてみよう.

まず頂点については, 先に求めた内部の格子点と境界上の格子点をまとめて

$$V = I + B\ (= 7 + 10 = 17)$$

となることが直ちにわかる. さて, ひとつの三角形は 3 個の辺をもち, ひとつの辺は 2 個の三角形に共有されている. ただし, 境界上にある辺が属している三角形は 1 個だけである. また, 境界上にある辺の個数は, 境界上にある頂点の個数に一致する. 従って, E は F と B によって

$$E = \frac{3F + B}{2}$$

と表すことができる. ここで等式 (E)* より, F, E, V は

$$F - E + V = 1$$

という関係で結ばれているから,

$$F - \frac{3F + B}{2} + (I + B) = 1$$

が成り立つ. これより, F と E は

$$F = 2I + B - 2\ (= 2 \cdot 7 + 10 - 2 = 22),$$

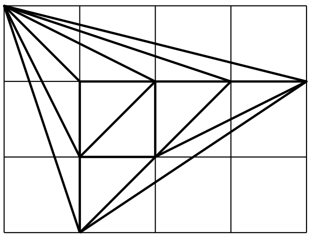
$$E = \frac{3(2I + B - 2) + B}{2} = 3I + 2B - 3\ (= 3 \cdot 7 + 2 \cdot 10 - 3 = 38)$$

と計算できることがわかる.

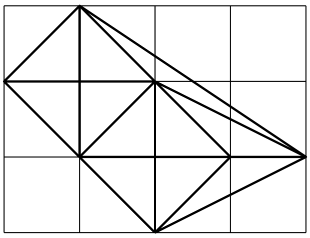
以上で述べた議論は, (格子点を頂点とする) 一般の多角形に対しても全く同様に適用できる. すなわち, 多角形を “頂点のみを格子点とする三角形” に細分するとき, 面の個数 F, 辺の個数 E, 頂点の個数 V は, 多角形の内部にある格子点の個数 I と境界上にある格子点の個数 B を用いて

$$F = 2I + B - 2, \qquad E = 3I + 2B - 3, \qquad V = I + B$$

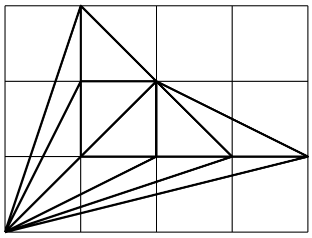
と表すことができる. 次の細分された多角形についても上の関係が成り立っていることを確かめられたい:



$F = 11,\ E = 18,\ V = 8$



$F = 11,\ E = 19,\ V = 9$



$F = 10,\ E = 17,\ V = 8$

ところで, ここまでに挙げた 4 つの例においては, 多角形の面積 S は面の個数 F の半分になっている. また, ピックの公式 (P) の右辺 $I + \frac{B}{2} - 1$ とは, 上で述べた関係式 $F = 2I + B - 2$ の右辺を $\frac{1}{2}$ 倍したものに他ならない. よって

(P)* “3 つの頂点のみを格子点とする三角形” の面積は $\frac{1}{2}$

であることが証明できれば, ピックの公式 (P) が示せることになる. ちなみに, (まだ証明が済んでいないが) ピックの公式を “3 つの頂点のみを格子点とする三角形” に適用してみると, その面積は

$$0 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

と計算されることになる. (P)* が実際に成り立つことについては次節で考察する.

8　格子点と面積 II

前節では, ピックの公式 (P) を述べ, その証明が

(P)* 　　　　“3 つの頂点のみを格子点とする三角形” の面積は $\frac{1}{2}$

を示すことに帰着できることまでを述べた. 容易にわかるように, (P)* は

(P)** 　　　　“4 つの頂点のみを格子点とする平行四辺形” の面積は 1

と言い換えることができる. 本節では (P)** を示してピックの公式の証明を完成させる.

(P)** を証明するために, まずは 4 つの格子点

$$\mathrm{O}(0,0), \quad \mathrm{A}(k,l), \quad \mathrm{B}(k+m,\, l+n), \quad \mathrm{C}(m,n)$$

を頂点とする平行四辺形の面積を k,l,m,n で表すことを考える. ただし

(♯) 　　　　k,l,m,n は全て正 (の整数) で, さらに $\frac{l}{k} < \frac{n}{m}$

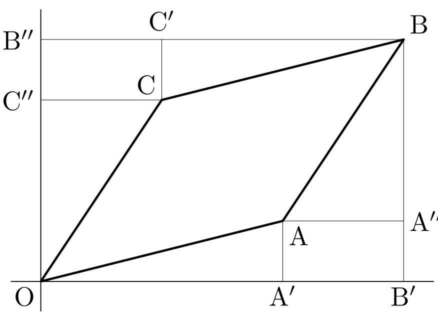
と仮定する. このとき OABC の面積は, 下図より, OB′BB″ の面積から

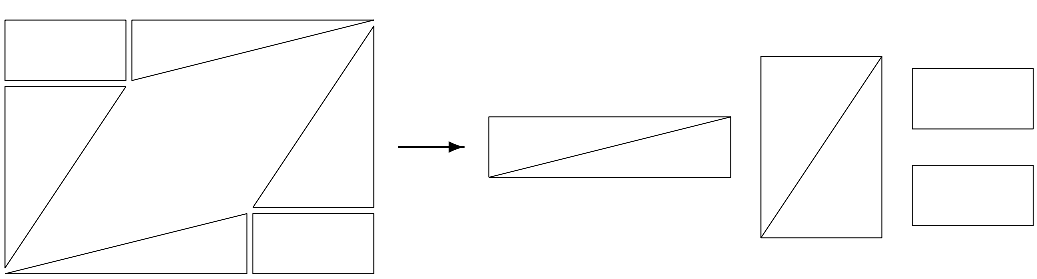
OA′A の面積,　AA″B の面積,　A′B′A″A の面積,
BC′C の面積,　CC″O の面積,　C′B″C″C の面積

を引いて

$$(k+m)(l+n) - \bigl(kl + mn + 2lm\bigr) = kn - lm$$

と計算される.





続いては, 条件 (♯) に加えて

$$(\flat)\qquad \text{OABC の境界上の格子点は 4 つの頂点 O, A, B, C に限る}$$

とも仮定した上で, OABC の内部の格子点の個数を求めることを考えよう. 今度は, OB′BB″ の内部の格子点の個数から

OA′A の内部の格子点の個数, AA″B の内部の格子点の個数, A′B′A″A の内部の格子点の個数,
BC′C の内部の格子点の個数, CC″O の内部の格子点の個数, C′B″C″C の内部の格子点の個数

ならびに

AA′ 上の格子点 (A′ は除く) の個数, AA″ 上の格子点 (A″ は除く) の個数,
CC′ 上の格子点 (C′ は除く) の個数, CC″ 上の格子点 (C″ は除く) の個数

を引いて, 求める格子点の個数は

$$(k+m-1)(l+n-1)-\big((k-1)(l-1)+(m-1)(n-1)+2(l-1)(m-1)+2l+2m-2\big)=kn-lm-1$$

と計算される. よって, 先の計算結果と合わせて

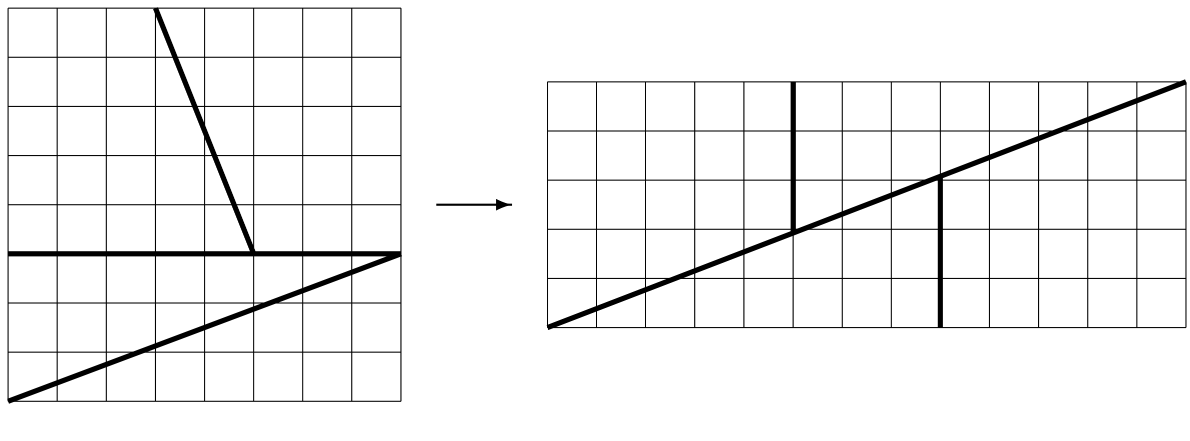
$$(\natural)\qquad (\text{OABC の内部の格子点の個数}) = (\text{OABC の面積}) - 1$$

が得られる.

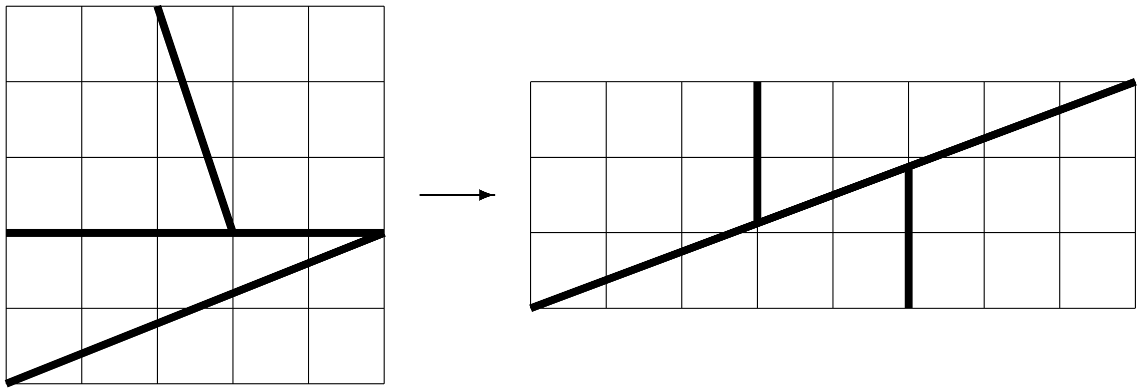
条件 (♯) を仮定せずに (♭) だけを仮定した場合, 平行四辺形 OABC の面積は $|kn-lm|$ となるが, (♮) はそのまま成立する (詳細は略). 従って, 特に OABC の内部に格子点が存在しないときには, OABC の面積は 1 となる. 平行四辺形のひとつの頂点が原点であるという仮定は本質的ではないため, 以上で (P)** が示せたことになる.

上で証明した (P)** の応用として, 最後に “面積出現・消滅パズル” を紹介しよう.

下図の左にあるのは 8×8 の正方形 (面積は 64) であるが, 太い線で 4 つに切り離して右のように組み直すと, 5×13 の長方形 (面積は 65) になる. つまり, 組み直したことで面積が 1 だけ増えたことになる!



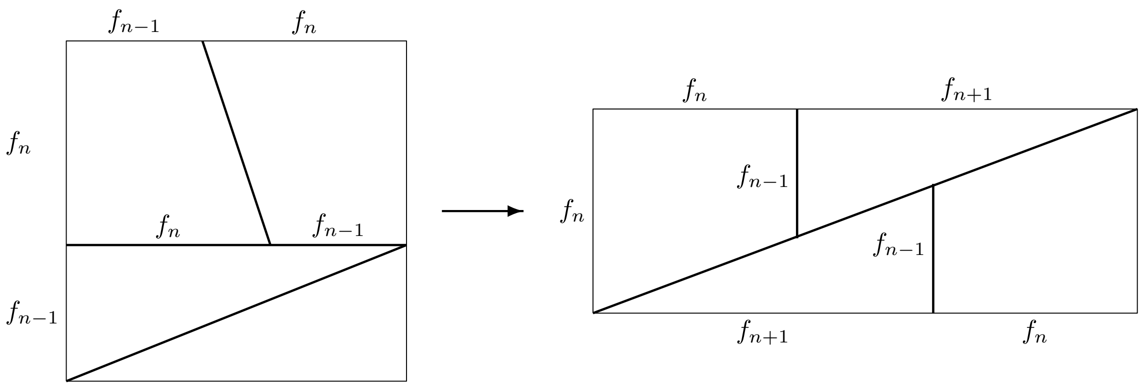
また, 下図の左にあるのは 5×5 の正方形 (面積は 25) である. これを太い線で切り離して右のように組み直すと, 3×8 の長方形 (面積は 24) になる. 今度は, 組み直したことで面積が 1 だけ減ったことになる!



このようなパズルは, 第 1 節で扱ったフィボナッチ数

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = 2, \quad f_4 = 3, \quad f_5 = 5, \quad f_6 = 8, \quad f_7 = 13, \quad f_8 = 21, \quad f_9 = 34, \quad f_{10} = 55, \quad \ldots$$

を利用して作ることができる. いま $n \geq 3$ とし, 一辺の長さが f_{n+1} $(= f_{n-1} + f_n)$ の正方形を下図のように組み直す:



このとき, $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$ より, 右側の長方形の面積は $f_n\, f_{n+2}$ である. ところが, 第 1 節で述べたように $f_n\, f_{n+2} - f_{n+1}^2 = (-1)^{n-1}$ が成り立つから, n が偶数のときには $f_n\, f_{n+2} = f_{n+1}^2 - 1$ となり, n が奇数のときには $f_n\, f_{n+2} = f_{n+1}^2 + 1$ となる. つまり, 面積は n が偶数のときには 1 だけ減っていて, n が奇数のときには 1 だけ増えていることになる.

もちろん, 組み直すことで面積が増減することはない. 実は, 右側の長方形の "対角線" の部分には "4 つの頂点のみを格子点とする平行四辺形" が隠れている. すなわち, n が偶数のときには平行四辺形状の隙間が空いていて, n が奇数のときには平行四辺形状に重なりが生じている. その結果, 面積が変化したように見えるのである. 先に挙げた例は, それぞれ $n = 5$ の場合と $n = 4$ の場合に当たる.

9　ピタゴラス数

$3, 4, 5$ や $5, 12, 13$ のように, 正の整数の 3 個組 a, b, c で条件 $a^2 + b^2 = c^2$ をみたすものを**ピタゴラス数**という. "ピタゴラス" 数という名前は, ピタゴラスの定理 (三平方の定理) に由来する. すなわち, ピタゴラスの定理 (の逆) により, ピタゴラス数を三辺の長さとするような三角形は直角三角形である. 計算機を利用して $a, b, c \leq 50$ という範囲でピタゴラス数を探索すると, 次の 20 組が見つかる:

a	b	c	
3	4	5	
5	12	13	
6	8	10	$*$
7	24	25	
8	15	17	
9	12	15	$*$
9	40	41	
10	24	26	$*$
12	16	20	$*$
12	35	37	

a	b	c	
14	48	50	$*$
15	20	25	$*$
15	36	39	$*$
16	30	34	$*$
18	24	30	$*$
20	21	29	
21	28	35	$*$
24	32	40	$*$
27	36	45	$*$
30	40	50	$*$

ただし, 条件 $a^2 + b^2 = c^2$ は a と b に関して対称であるから, $a \leq b$ としている. 例えば, $4, 3, 5$ もピタゴラス数であるが, これは $3, 4, 5$ と本質的に同じものなので載せていない.

いま a, b, c をピタゴラス数とすると, $2a, 2b, 2c$ や $3a, 3b, 3c$ もピタゴラス数となる. 実際, k を正の整数とするとき, $a^2 + b^2 = c^2$ の両辺に k^2 を掛ければ $(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$ となるから, ka, kb, kc はピタゴラス数である. 上に挙げた表において右側に $*$ がついているものは, 他の "小さい" ピタゴラス数を定数倍して得られるものである. そのようなピタゴラス数とは 1 より大きい公約数をもつものに他ならない. そうでないもの, すなわち最大公約数が 1 であるようなピタゴラス数は**原始的**であるという. 上の表の場合, 20 組あるピタゴラス数のうち原始的なものは 7 組だけである. 探索の範囲を $a, b, c \leq 100$ に広げても, 原始的なピタゴラス数は次の 16 組しか存在しない:

a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	15	17
9	40	41
11	60	61
12	35	37
13	84	85

a	b	c
16	63	65
20	21	29
28	45	53
33	56	65
36	77	85
39	80	89
48	55	73
65	72	97

本節では, 原始的なピタゴラス数を組織的に構成する方法を考察する.

さて, 条件 $a^2+b^2=c^2$ は, 両辺を c^2 で割れば $\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$ となる. つまり, a,b,c をピタゴラス数とするとき, $\frac{a}{c},\frac{b}{c}$ をそれぞれ α,β と置けば, これらは条件 $\alpha^2+\beta^2=1$ をみたす正の有理数となる. ところで, α,β が $\alpha^2+\beta^2=1$ をみたすということは, (α,β) が単位円 (原点を中心とする半径 1 の円) $x^2+y^2=1$ 上の点であることを意味している. そこで

単位円 $x^2+y^2=1$ 上の点で x 座標と y 座標が共に有理数であるようなもの

を求めることを考えてみよう. 以下ではそのような点を "単位円上の**有理点**" と呼ぶことにする.

いま, 単位円上の点 $(-1,0)$ を通り, 傾きが t であるような直線 $y=t(x+1)$ を考える. この直線と単位円との交点を求めるためには, 連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=t(x+1) \end{cases}$$

を解けばよい. 2 式から y を消去すると

$$x^2+t^2(x+1)^2=1,$$

すなわち

$$(x+1)\big((1+t^2)x-(1-t^2)\big)=0$$

となるから,

$$x=-1,\ \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

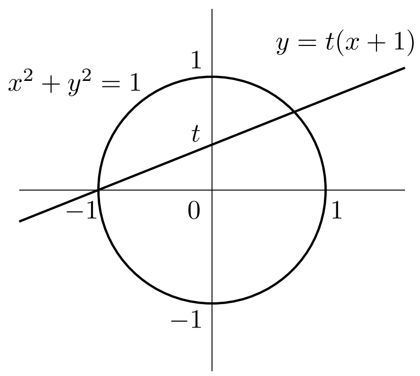
ここで, $y=t(x+1)$ より, $x=-1$ のときには $y=0$ となり, $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ のときには

$$y=t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)=\frac{2t}{1+t^2}$$

となる. 以上より, 直線 $y=t(x+1)$ は単位円 $x^2+y^2=1$ と

$$(x,y)=(-1,0),\ \left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

の 2 点で交わることがわかった. これらのうち $(-1,0)$ が交点となることは初めからわかっているから, 重要なのはもうひとつの交点 $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)$ である.



上で述べた計算において, t は有理数であると仮定してみる. このとき, 得られた交点 $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ の x 座標 $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ と y 座標 $\frac{2t}{1+t^2}$ は共に有理数となる. つまり, ひとつの有理数から単位円上の有理点がひとつ手に入る訳である. 逆に, (α, β) を単位円上の有理点とするとき, この点と $(-1, 0)$ を通る直線の傾き $\frac{\beta}{\alpha+1}$ を t と置けば, α と β が有理数であることより t も有理数で, 上と同じ計算により $(\alpha, \beta) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ となることがわかる. ただし, (α, β) と $(-1, 0)$ が同じ点である場合は除く. 以上の議論により, 単位円上の有理点 (ただし $(-1, 0)$ は除く) と有理数との間には

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \quad \longleftrightarrow \quad t$$

という 1 対 1 の対応がつくことが示せたことになる.

最後に, 上で示した対応を用いて原始的なピタゴラス数を構成しよう. 有理点のうちピタゴラス数と関係するのは x 座標と y 座標が共に正のものであった. また, $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ と $\frac{2t}{1+t^2}$ が共に正であるためには $0 < t < 1$ であることが必要かつ十分である. そのような有理数 t は, 互いに素な整数 m, n $(0 < m < n)$ によって $t = \frac{m}{n}$ と表すことができる. さらに

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2} = \frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}, \qquad \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\,\frac{m}{n}}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2} = \frac{2mn}{n^2+m^2}.$$

以上で, 単位円上の有理点のうち第 1 象限にあるものは

$$\left(\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}, \frac{2mn}{n^2+m^2}\right) \qquad (m, n \text{ は } 0 < m < n \text{ をみたす互いに素な整数})$$

と表せることが証明できた. これより, ピタゴラス数

$$n^2 - m^2, \qquad 2mn, \qquad n^2 + m^2$$

が直ちに得られる. このピタゴラス数は, m, n の偶奇が異なるときには原始的となる. 逆に, 全ての原始的なピタゴラス数は, 上で述べた方法により得ることができる (詳細は略).

m	n	n^2-m^2	$2mn$	n^2+m^2
1	2	3	4	5
2	3	5	12	13
1	4	15	8	17
3	4	7	24	25
2	5	21	20	29
4	5	9	40	41
1	6	35	12	37
5	6	11	60	61
2	7	45	28	53
4	7	33	56	65
6	7	13	84	85

m	n	n^2-m^2	$2mn$	n^2+m^2
1	8	63	16	65
3	8	55	48	73
5	8	39	80	89
7	8	15	112	113
2	9	77	36	85
4	9	65	72	97
8	9	17	144	145
1	10	99	20	101
3	10	91	60	109
7	10	51	140	149
9	10	19	180	181

10　二進法 I

我々は通常 1234 という数を “イチニサンヨン” ではなく “センニヒャクサンジュウヨン” と読むが, それは 4 つの数字 $1, 2, 3, 4$ を 1234 と並べたものが $10^3 \cdot 1 + 10^2 \cdot 2 + 10^1 \cdot 3 + 10^0 \cdot 4$ を意味するという決まりになっているからである．つまり, 十の位にある 3 は 30 $(= 10^1 \cdot 3)$ を意味し, 百の位にある 2 は 200 $(= 10^2 \cdot 2)$ を意味する．また, 千の位にある 1 は 1000 $(= 10^3 \cdot 1)$ を意味する．このように, $0 \leq a_k < 10$ をみたす整数 a_k を用いて

$$10^n a_n + \cdots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0$$

と表される数を

$$a_n \cdots a_2\, a_1\, a_0$$

と書くことを**十進法**表示という．同様に, $0 \leq a_k < 2$ をみたす整数 a_k を用いて

$$2^n a_n + \cdots + 2^2 a_2 + 2^1 a_1 + 2^0 a_0$$

と表される数を

$$a_n \cdots a_2\, a_1\, a_0$$

と書くことを**二進法**表示という．$0 \leq a_k < 2$ をみたす整数 a_k は 0 と 1 に限るから, 二進法表示では 0 と 1 という 2 種類の数字しか使われない．なお, 十進法表示の場合と同様に, 二進法表示でも小数を考えることができるが, 以下では 0 以上の整数だけを扱うことにする．

二進法表示を用いる際には, 右下に小さく “(2)” をつけて十進法表示と区別する．また, これも十進法表示と区別するため, 二進法表示を読むときには左から順に数字 (0 または 1) を読む．例えば $1011_{(2)}$ は “イチゼロイチイチ カッコニ” と読む．この数は十進法表示では

$$2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 = 8 + 2 + 1 = 11$$

となる．

二進法を用いると, 使う数字の種類が少なくて済む反面, 桁数は多くなり, 繰り上がりも頻繁に起きる．電子回路では十進法よりも二進法の方が扱いが容易なため, コンピュータの内部では二進法を介して計算が行われている．

与えられた数 (0 以上の整数) a を二進法で表示するためには

$$(*) \qquad a = 2^n a_n + \cdots + 2^2 a_2 + 2^1 a_1 + 2^0 a_0 \qquad (\text{各 } a_k \text{ は } 0 \text{ または } 1)$$

となるような $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ を求めなければならない．すなわち, a を

$$2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad \ldots$$

のいくつかの和として表す必要がある (ただし同じ数を 2 回以上使ってはならない). $(*)$ を a の**二進展開**という. 例えば, 15 までの整数の二進展開と二進法表示は次のようになる:

	二進展開	二進法表示
0	0	$0_{(2)}$
1	1	$1_{(2)}$
2	2	$10_{(2)}$
3	$2+1$	$11_{(2)}$
4	4	$100_{(2)}$
5	$4 \quad +1$	$101_{(2)}$
6	$4+2$	$110_{(2)}$
7	$4+2+1$	$111_{(2)}$

	二進展開	二進法表示
8	8	$1000_{(2)}$
9	$8 \quad\quad +1$	$1001_{(2)}$
10	$8 \quad +2$	$1010_{(2)}$
11	$8 \quad +2+1$	$1011_{(2)}$
12	$8+4$	$1100_{(2)}$
13	$8+4 \quad +1$	$1101_{(2)}$
14	$8+4+2$	$1110_{(2)}$
15	$8+4+2+1$	$1111_{(2)}$

さて, $(*)$ の右辺を 2 で割ると, 商が $2^{n-1}a_n + \cdots + 2^1 a_2 + 2^0 a_1$ で余りが a_0 となる:

$$2^n a_n + \cdots + 2^2 a_2 + 2^1 a_1 + 2^0 a_0 = 2\left(2^{n-1}a_n + \cdots + 2^1 a_2 + 2^0 a_1\right) + a_0.$$

従って, a を 2 で割ったときの商を q, 余りを r とすると

$$q = 2^{n-1}a_n + \cdots + 2^1 a_2 + 2^0 a_1, \qquad r = a_0$$

となり, 後者の式より a_0 の値がわかる. すなわち, a が偶数ならば $a_0 = 0$ であり, a が奇数ならば $a_0 = 1$ である. さらに, 前者の式に対して同様の操作を繰り返すことにより $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を求めることができる. つまり, a を次々に 2 で割っていくと, その際の余りとして $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ の値を順に得ることができる. 例えば, 26 を次々に 2 で割って

$$\begin{array}{r@{\,}l} 2 \,) & \underline{\;26\;} \\ 2 \,) & \underline{\;13\;} \cdots \; 0 \\ 2 \,) & \underline{\;\;6\;} \cdots \; 1 \\ 2 \,) & \underline{\;\;3\;} \cdots \; 0 \\ 2 \,) & \underline{\;\;1\;} \cdots \; 1 \\ & \;\;\;0\; \cdots \; 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 26 \div 2 = 13 \ \cdots \ 0 \\ 13 \div 2 = \ \ 6 \ \cdots \ 1 \\ 6 \div 2 = \ \ 3 \ \cdots \ 0 \\ 3 \div 2 = \ \ 1 \ \cdots \ 1 \\ 1 \div 2 = \ \ 0 \ \cdots \ 1 \end{array}$$

と計算することにより, 26 の二進展開は

$$26 = 2^4 \cdot 1 + 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 0$$

となることがわかり, 二進法表示 $26 = 11010_{(2)}$ が得られる.

先にも述べたように, 二進法で使用する数字は 0 と 1 の 2 種類だけである. この “2 つだけ” という性質を利用した “数当てゲーム” を紹介しよう.

(0) まず, 出題者は 1 から 31 までの数が書かれた次のようなカードを用意する:

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

カード A

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

カード B

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

カード C

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

カード D

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

カード E

(1) 次に, 回答者は $1, 2, \ldots, 31$ の中から数をひとつ選ぶ (どの数を選んだのかは秘密にする).

(2) 続いて, 出題者は回答者に選んだ数が書いてあるカードを全て挙げてもらう.

(3) 挙げられたカードの左上にある数を全て足し合わせると, 回答者が選んだ数になる.

例えば, 回答者が選んだ数が 13 であるとすると, 挙げられるカードは A, C, D の 3 枚である. 出題者は, 左上の数を足し合わせて

$$1 + 4 + 8 = 13$$

と選んだ数を言い当てる訳である.

このゲームを成立させているのは “0 から 31 までの整数は

$$a_4\, a_3\, a_2\, a_1\, a_{0\,(2)} = 2^4 a_4 + 2^3 a_3 + 2^2 a_2 + 2^1 a_1 + 2^0 a_0 \qquad (\text{各 } a_k \text{ は 0 または 1})$$

という形に一意的に表される” という事実である. カード A に書かれているのは $a_0 = 1$ となるような数で, このカードが挙げられたかどうかで a_0 の値を知ることができる. 同様に, カード B, C, D, E が挙げられたかどうかで a_1, a_2, a_3, a_4 の値を知ることができるという仕組みになっている.

11　二進法 II

三山(みやま)崩しとは,

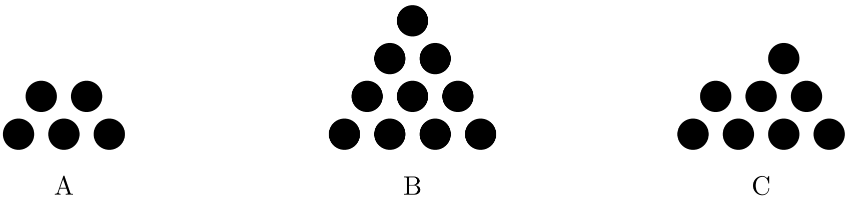
(1) 碁石を何個かずつまとめて合計 3 つの山を作り,

(2) 2 人で交互に石を取って行き,

(3) 最後の石を取った方が勝ち

というゲームのことである. ただし, (2) では石を 1 度に (1 個以上ならば) 何個取っても構わないが, 2 つ以上の山から取ることは禁止とする.

3 つの山を A, B, C と呼ぶことにし, “A に a 個, B に b 個, C に c 個石がある” という状態を (a,b,c) で表すことにする. 例えば, 下図のような状態は $(5,10,8)$ と表す:



このゲームを何回か行えば, “この形に持ち込めば勝った” と言える局面がいくつかあることに気づくだろう. 例えば, 自分の手番が終わったときに $(1,1,0)$ になっていれば, 次に相手ができることは ① A から石を 1 個取るか ② B から石を 1 個取るかだけであるから, その次の自分の手番で最後に残った石を取って勝ちとなる:

$$\begin{tikzcd}
 & (0,1,0) \arrow[dr] & \\
(1,1,0) \arrow[ur, "①"] \arrow[dr, "②"'] & & (0,0,0) \\
 & (1,0,0) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

また, 自分の手番が終わったときに $(2,2,0)$ になっていても, **適切な手順を踏めば**勝つことができる:

$$\begin{tikzcd}
 & (1,2,0) \arrow[ddr] & \\
(2,2,0) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & (0,2,0) \arrow[r] & (0,0,0) \\
 & (2,1,0) \arrow[r] & (1,1,0) \\
 & (2,0,0) \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

($(1,1,0)$ となったときには先に考えた場合に帰着される.) このように “自分の手番が終わったときに, この形になっていれば, あとは (相手の手に応じた) 適切な手順を踏めば必ず勝てる” ような状態を**必勝形**と呼ぶ. 上で示したように, $(1,1,0)$ や $(2,2,0)$ は必勝形の例になっている.

上で述べた $(1,1,0)$ や $(2,2,0)$ の他にも, $(3,3,0)$ や $(4,4,0)$ のように $(n,n,0)$ の形は必勝形になっている. そのことを示すために, 以下しばらく山が 2 つの場合 (二山崩し) を考察することにする. これまでと

同様に 2 つの山を A, B と呼び, “A に a 個, B に b 個石がある” という状態を (a,b) で表す. この場合には話は簡単で, 次が成り立つ:

(a,b) が必勝形であるためには $a=b$ であることが必要かつ十分である.

この事実は, 良形・悪形という概念を用いて以下のように示される:

二山崩しの状態 (a,b) について, $a=b$ のとき**良形**, そうでないとき**悪形**と呼ぶことにする. このとき, 次が成り立つことが直ちにわかる:

(1) 終局の形は良形である.

(2) 良形に任意の一手を加えると悪形になる.

(3) 悪形に適切な一手を加えると良形にできる.

(1), (2), (3) ならびにゲームが有限回の手順で終了すること (これは明らか) より “良形 = 必勝形” であることが従う. すなわち, ひとたび自分の手が終わったときに良形になっていれば, (2) と (3) より, そこから先の相手の手は常に悪形で終わるようにできるから, (1) より, 相手が勝つことはあり得ないという訳である. つまり, ゲームの開始時に悪形になっていれば先手必勝であり, 良形になっていれば後手必勝である. なお, (1) の “終局の形” とは $(0,0)$ のことで, (3) の “適切な一手” とは “石が多い方の山から何個か取って石の個数を揃える” である.

話を三山崩しに戻そう. もしも二山崩しのときのように条件 (1), (2), (3) をみたす良形・悪形という概念が定義できれば, 同じ理屈によって “良形 = 必勝形” が示せる. 問題は良形・悪形を定める方法であるが, そのために数 (0 以上の整数) の二進和というものを定義する.

数 a,b の二進法表示をそれぞれ $a=a_n\cdots a_2\,a_1\,a_{0\,(2)}$, $b=b_n\cdots b_2\,b_1\,b_{0\,(2)}$ とするとき, それらの**二進和** $a\oplus b=c_n\cdots c_2\,c_1\,c_{0\,(2)}$ を

$$c_k=\begin{cases}0 & (a_k=b_k \text{ の場合})\\ 1 & (a_k\neq b_k \text{ の場合})\end{cases}$$

により定める. 例えば $a=3,\ b=6$ の場合には, $3=2+1=11_{(2)},\ 6=4+2=110_{(2)}$ と

$$11_{(2)}\oplus 110_{(2)}=101_{(2)} \qquad\qquad \begin{array}{r} 11_{(2)}\\ \oplus\ \ 110_{(2)}\\ \hline 101_{(2)}\end{array}$$

より, $3\oplus 6=101_{(2)}=4+1=5$ となる. また $a=5,\ b=7$ の場合には, $5=4+1=101_{(2)},\ 7=4+2+1=111_{(2)}$ と

$$101_{(2)}\oplus 111_{(2)}=10_{(2)} \qquad\qquad \begin{array}{r} 101_{(2)}\\ \oplus\ \ 111_{(2)}\\ \hline 10_{(2)}\end{array}$$

より, $5\oplus 7=10_{(2)}=2$ となる. 同様に計算することにより, $0\le a,b\le 7$ に対する $a\oplus b$ の値は次の表のようになることがわかる:

$a \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

この表からもわかるように, 数 a, b, c に対して 3 つの条件

$$a \oplus b = c, \qquad b \oplus c = a, \qquad c \oplus a = b$$

は互いに同値になる. そこで, 三山崩しの状態 (a, b, c) について, 上の条件が成り立っているとき**良形**, そうでないとき**悪形**と呼ぶことにすると, 次が成り立つことが示せる (詳細は略):

(1) 終局の形は良形である.

(2) 良形に任意の一手を加えると悪形になる.

(3) 悪形に適切な一手を加えると良形にできる.

これより直ちに “良形 = 必勝形” であることが従う.

例えば $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ の場合には,

$$3 \oplus 4 = 7 > 5, \qquad \underline{4 \oplus 5 = 1 < 3}, \qquad 5 \oplus 3 = 6 > 4$$

であるから, 悪形 $(3, 4, 5)$ を良形にするためには A から石を 2 個取って $(1, 4, 5)$ とすればよい. また $(a, b, c) = (3, 5, 7)$ の場合には,

$$\underline{3 \oplus 5 = 6 < 7}, \qquad \underline{5 \oplus 7 = 2 < 3}, \qquad \underline{7 \oplus 3 = 4 < 5}$$

であるから, 悪形 $(3, 5, 7)$ を良形にするためには ① C から石を 1 個取って $(3, 5, 6)$ とするか ② A から石を 1 個取って $(2, 5, 7)$ とするか ③ B から石を 1 個取って $(3, 4, 7)$ とすればよい.

12 魔方陣

1 から n^2 までの整数が入った $n \times n$ の升目で, 各行, 各列, および両対角線に並んだ数の和が一定であるようなものを n 次の**魔方陣**という (魔法陣ではないことに注意せよ). ただし n は正の整数である. 例えば, 次の図は 3 次の魔方陣である:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

実際,

$$\begin{array}{ll} \text{各行の和} & 4+9+2, \quad 3+5+7, \quad 8+1+6, \\ \text{各列の和} & 4+3+8, \quad 9+5+1, \quad 2+7+6, \\ \text{両対角線の和} & 4+5+6, \quad 2+5+8 \end{array}$$

は全て 15 に一致する. 本節では, 奇数次の魔方陣を構成する方法を述べる.

以下しばらくは, 上で挙げた 3 次の魔方陣を構成する手順を説明し, それが魔方陣となる理由を考察する. そのために, まずは次の図から話を始めよう:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

もちろん, これは魔方陣ではない. 1 から 9 までを左上から順に並べた平凡な方陣 (以下では "凡方陣" と呼ぶことにする) に過ぎない. この凡方陣の升目を次の 2 通りに区分けする:

A	B	C
C	A	B
B	C	A

c	b	a
b	a	c
a	c	b

いずれの区分けも, 9 個ある升を対角線に "平行" な 3 つの部分に分けている. 大文字を用いた区分けは右下がりの対角線に "平行" であり, 小文字を用いた区分けは左下がりの対角線に "平行" である. このとき, 凡方陣において同じアルファベットでマークされた升にある数の和は全て 15 になる:

$$\begin{array}{llll} \text{A}: & 1+5+9=15, & \text{a}: & 3+5+7=15, \\ \text{B}: & 2+6+7=15, & \text{b}: & 2+4+9=15, \\ \text{C}: & 3+4+8=15, & \text{c}: & 1+6+8=15. \end{array}$$

このことは, 直接的に計算しなくても, 以下のように考えれば容易に確かめることができる.

いま, 凡方陣の左と上の欄外に, 次のように数を書き加えてみる:

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
 & 1 & 2 & 3 \\ \cline{2-4}
0 & 1 & 2 & 3 \\ \cline{2-4}
3 & 4 & 5 & 6 \\ \cline{2-4}
6 & 7 & 8 & 9 \\ \cline{2-4}
\end{array}$$

このとき, 各升に入っている数は, その升の左と上の欄外にある数の和になっている:

$$\begin{aligned}
&1 = 0 + 1, \qquad && 2 = 0 + 2 \qquad && 3 = 0 + 3, \\
&4 = 3 + 1, && 5 = 3 + 2 && 6 = 3 + 3, \\
&7 = 6 + 1, && 8 = 6 + 2 && 9 = 6 + 3.
\end{aligned}$$

従って, 先の計算は

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}: \ (0+1)+(3+2)+(6+3), \qquad && \mathrm{a}: \ (0+3)+(3+2)+(6+1), \\
&\mathrm{B}: \ (0+2)+(3+3)+(6+1), && \mathrm{b}: \ (0+2)+(3+1)+(6+3), \\
&\mathrm{C}: \ (0+3)+(3+1)+(6+2), && \mathrm{c}: \ (0+1)+(3+3)+(6+2)
\end{aligned}$$

と書き直すことができて, これらは全て

$$(0+3+6)+(1+2+3) = 9+6 = 15$$

に一致することになる. このようなことが起きるのは, アルファベットによって区分けされた部分には行や列の重複がなく, 各行・各列の升を 1 個ずつ含んでいるからである. また, 凡方陣の第 2 行の和 $4+5+6$ と第 2 列の和 $2+5+8$ も共に 15 となるが, その理由も上で述べた分解を用いて説明できる:

$$\begin{aligned}
4+5+6 &= (3+1)+(3+2)+(3+3) = (3+3+3)+(1+2+3) = 9+6 = 15, \\
2+5+8 &= (0+2)+(3+2)+(6+2) = (0+3+6)+(2+2+2) = 9+6 = 15.
\end{aligned}$$

さて, 凡方陣を次の左の図のように変形し, 3×3 の升目からはみ出た部分については, 上下左右に 3 だけ移動して升目に収める. すると, 冒頭に挙げた 3 次の魔方陣ができ上がる:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 4 & & 2 & \\
7 & & 5 & & 3 \\
 & 8 & & 6 & \\
 & & 9 & &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
4 & 9 & 2 \\ \hline
3 & 5 & 7 \\ \hline
8 & 1 & 6 \\ \hline
\end{array}$$

これが実際に魔方陣となっていることを見るためには, 上の図において数 $1, 2, \ldots, 9$ を区分けに応じてアルファベット 2 文字 (大文字と小文字の組) で置き換えてみるとよい:

		Ac		
	Cb		Bb	
Ba		Aa		Ca
	Cc		Bc	
		Ab		

→

Cb	Ab	Bb
Ca	Aa	Ba
Cc	Ac	Bc

移動後の図において, 第 1 行には b, 第 2 行には a, 第 3 行には c が並んでいる. また, 第 1 列には C, 第 2 列には A, 第 3 列には B が並んでいる. よって, 各行や各列の数の和は, 凡方陣において同じアルファベットでマークされた升にある数の和, すなわち 15 に一致することになる. また, 移動後の対角線とは凡方陣における第 2 行と第 2 列に他ならないから, これらの数の和も 15 となる.

以上で述べた方法と同様の手順により, 任意の奇数 n に対して n 次の魔方陣を構成することができる (魔方陣となっている理由も同様である). 例えば, 5 次の魔方陣を作るためには次のようにすればよい:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

→

				1				
			6		2			
		11		7		3		
	16		12		8		4	
21		17		13		9		5
	22		18		14		10	
		23		19		15		
			24		20			
				25				

→

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

3 次の場合と同様に数をアルファベット 2 文字で置き換えると次のようになる:

Ae	Bd	Cc	Db	Ea
Ed	Ac	Bb	Ca	De
Dc	Eb	Aa	Be	Cd
Cb	Da	Ee	Ad	Bc
Ba	Ce	Dd	Ec	Ab

→

				Ae				
			Ed		Bd			
		Dc		Ac		Cc		
	Cb		Eb		Bb		Db	
Ba		Da		Aa		Ca		Ea
	Ce		Ee		Be		De	
		Dd		Ad		Cd		
			Ec		Bc			
				Ab				

→

Dc	Ec	Ac	Bc	Cc
Db	Eb	Ab	Bb	Cb
Da	Ea	Aa	Ba	Ca
De	Ee	Ae	Be	Ce
Dd	Ed	Ad	Bd	Cd

13　鳩の巣論法

m 個ある鳩の巣に n 羽の鳩が入っているとき, $m < n$ であれば, 少なくともひとつの巣には 2 羽以上の鳩が入っている. このアタリマエの事実を**鳩の巣原理**といい, 鳩の巣原理を用いた論法を**鳩の巣論法**という. 鳩の巣の代わりに引き出しや部屋に喩えて**引き出し論法**や**部屋割り論法**と呼ぶこともある. この論法は, 何を鳩と見なし, 何を巣と思うかによって, 様々な場面に適用可能であり, 何かの性質をみたすものの存在を示すのに用いられることが多い.

例えば, (十進法表示で用いられる) 数字は 0 から 9 までの 10 個であるから, 正の整数を 11 個選べば, その中には一の位が同じものが (少なくともひと組) 存在する. この場合には, 選んだ数を鳩と見なし, 0 から 9 までの数字を巣と思って, 鳩は一の位の巣に入っていると考える訳である. 本節では, 鳩の巣論法を利用して存在を証明する例を紹介する.

$1, 2, 3, 4, 5, 6$ から相異なる 4 個の数をどのように選んでも, その中には和が 7 となるような 2 つの数が必ず存在する. 例えば, $1, 3, 5, 6$ を選んだ場合には $1+6=7$ となり, $2, 3, 4, 5$ を選んだ場合には $2+5=3+4=7$ となる. この事実を鳩の巣論法を利用して証明してみよう. $1, 2, 3, 4, 5, 6$ の相異なる 2 個の和が 7 となるのは, 足す順番を無視すれば

$$1+6, \qquad 2+5, \qquad 3+4$$

の 3 通りに限る. そこで, 3 個の巣 A, B, C を用意し, 選んだ 4 個の数を鳩と見なして

$1, 6$ は巣 A に,

$2, 5$ は巣 B に,

$3, 4$ は巣 C に

入れたと思う. このとき, 鳩の巣原理により, 同じ巣に入っている数が少なくとも 2 個あることになる. それらは相異なるため, 和は 7 となる.

3×3 の升目に $1, 2, 3$ をどのように入れても, 各行の和, 各列の和, 両対角線の和として得られる 8 個の数の中には同じ数が必ず存在する. この事実も鳩の巣論法で示すことができる. $1, 2, 3$ の中から 3 つの数を (重複を許して) 選び, それらの和をとると, 足す順番を無視すれば

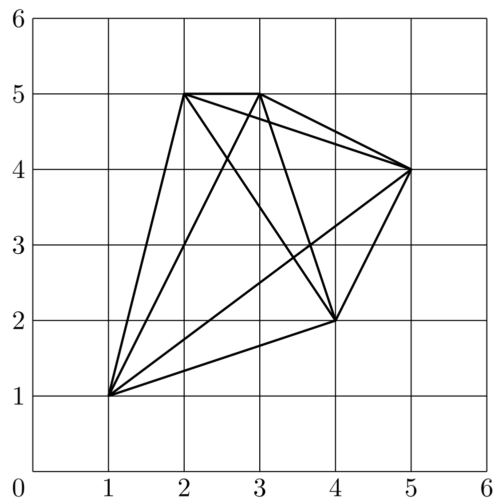
$$\begin{array}{lll}
1+1+1=3, & & \\
1+1+2=4, & & \\
1+1+3=5, & 1+2+2=5, & \\
 & 1+2+3=6, & 2+2+2=6, \\
 & 1+3+3=7, & 2+2+3=7, \\
 & & 2+3+3=8, \\
 & & 3+3+3=9
\end{array}$$

という 10 通りの計算を行うことになる. しかし, 計算結果だけを見れば, 3 から 9 までの 7 個の数しか現れていない. そこで, 各行の和, 各列の和, 両対角線の和 (8 個) を鳩と見なし, 計算結果 (7 通り) を巣と思って鳩の巣原理を適用すれば, 和に重複が現れることがわかる.

xy 平面上に相異なる 5 個の格子点 (x 座標と y 座標が共に整数であるような点) をどのように選んでも, その中には中点も格子点であるような 2 つの点が必ず存在する. 例えば, 格子点

$$(1,1),\quad (4,2),\quad (5,4),\quad (3,5),\quad (2,5)$$

に対しては, $(1,1)$ と $(3,5)$ の中点 $(2,3)$ が格子点となっている:



この場合には, 選んだ 5 個の格子点を x 座標と y 座標の偶奇に応じて

x 座標が偶数, y 座標も偶数である点,
x 座標が偶数, y 座標が奇数である点,
x 座標が奇数, y 座標が偶数である点,
x 座標が奇数, y 座標も奇数である点

の 4 通りに分類すれば, x 座標の偶奇と y 座標の偶奇が共に一致している点が少なくとも 2 個あることがわかる. (a,b), (c,d) をそのような点とすると, それらの中点 $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ も格子点となる. 実際, a, c の偶奇と b, d の偶奇が共に一致していることより, $a+c$ と $b+d$ は偶数, 従って $\frac{a+c}{2}$ と $\frac{b+d}{2}$ は整数である.

14　可算集合

集合 (数の集まりや点の集まりだと思って構わない) の全ての要素に “1 番目, 2 番目, 3 番目, . . . ” と番号付けができるとき, その集合は**可算** (または**可付番**) であるという．例えば, 有限個の要素からなる集合や自然数 (正の整数) の全体は明らかに可算であるが, 他にも正の偶数全体 $\{2,4,6,8,10,\dots\}$ や正の奇数全体 $\{1,3,5,7,9,\dots\}$ も可算である．

自然数の全体や, 正の偶数全体, 正の奇数全体といった自然数の一部を番号付けするためには, 小さい方から順に “1 番目, 2 番目, 3 番目, . . . ” とすればよい．また, 負の整数の全体や負の整数の一部も, 大きい方から順に “1 番目, 2 番目, 3 番目, . . . ” と数え上げれば番号付けができる．他方, 整数の全体

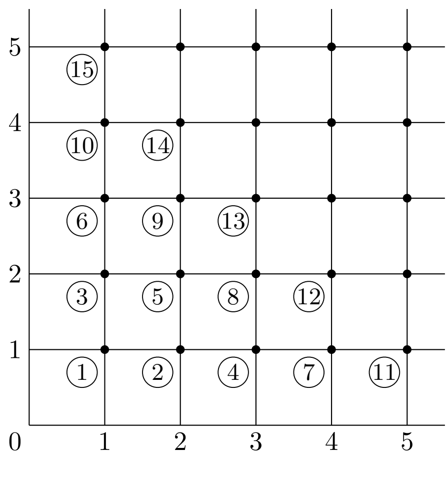
$$\{\dots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots\}$$

は, 上で挙げた例のように “端から” 順に数え上げることはできない．しかし, “小さい方から” と “大きい方から” を組み合わせて

$$0,\quad 1,\ -1,\quad 2,\ -2,\quad 3,\ -3,\quad 4,\ -4,\quad 5,\ -5,\quad \dots$$

と並べてやれば, 番号を付けることができる．例えば, 2 は “4 番目の整数” であり, -5 は “11 番目の整数” であるといった具合である．つまり, 整数の全体は可算である．一般に可算な集合の部分集合は可算である (その部分集合に属していない要素は飛ばして数え上げればよい) から, 整数の一部も可算となる．

それでは, xy 平面上の格子点 (x 座標と y 座標が共に整数であるような点) の全体は可算だろうか？ここでは, 第 1 象限にある格子点, すなわち x 座標と y 座標が共に正の整数であるような点だけを数え上げることを考えてみよう．この場合には, 格子点が左下の $(1,1)$ から右上に向かって広がっていると思えば, 下図のような番号付けに気づくだろう:



つまり, 第 1 象限にある格子点の全体は可算である．第 1 象限という制限を外した格子点の全体も可算であることが示せる (詳細は略).

正の有理数は, (既約分数で表したときの) 分母・分子という正の整数の 2 個組に対応させれば, 第 1 象限にある格子点と同一視することができる. この同一視により, 第 1 象限にある格子点のうち x 座標と y 座標が互いに素であるようなものが正の有理数と 1 対 1 に対応する. 上で挙げた格子点の番号付けに従って正の有理数を並べれば

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{5}{1},\ \cdots$$

のようになる. ただし, 格子点の x 座標を分母, y 座標を分子と見なした. また, 既約でない分数は飛ばしてある. これより, 有理数の全体も

$$0,\ \frac{1}{1},\ -\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ -\frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{3}{1},\ -\frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ -\frac{4}{1},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{5},\ \frac{5}{1},\ -\frac{5}{1},\ \cdots$$

のように並べられることがわかる. つまり, 有理数の全体は可算である.

ここまでに述べたように, 有限個の要素からなる集合, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体はいずれも可算である. しかし, どのような集合でも可算である訳ではない. 実際, 例えば

(♯) ○と×からなる長さ無限の文字列の全体は可算**でない**

ことが示せる.

(♯) の証明を述べる前に, 簡単な例を通して証明のアイデアを説明しておこう. いま, ○と×からなる長さ 10 の文字列

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
文字列 1 :	○	○	×	○	×	○	×	○	○	×
文字列 2 :	○	×	×	○	×	×	○	×	○	×
文字列 3 :	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×
文字列 4 :	○	×	○	×	×	○	×	○	×	×
文字列 5 :	×	○	×	○	○	×	○	×	×	○
文字列 6 :	○	○	×	○	×	×	×	○	○	×
文字列 7 :	○	×	○	○	×	×	○	×	○	×
文字列 8 :	×	○	×	×	○	○	×	×	○	×
文字列 9 :	○	×	○	○	×	○	×	○	○	×
文字列 10 :	×	○	×	○	×	×	○	×	×	○

を考えよう. 2 種類の文字からなる長さ 10 の文字列は全部で 1024 $(= 2^{10})$ 通りあるから, 文字列は上に挙げた 10 通りが全てではない. つまり, 上のリストに載っていない長さ 10 の文字列が (大量に) 存在する. そのような文字列を構成するためには, 例えばリストの "対角線" に並んでいる ○×○×○×○×○○ (下線を引いた部分) を "反転" して ×○×○×○×○×× とすればよい. 実際, このようにして構成された文字列 ×○×○×○×○×× は, 文字列 1 とは 1 文字目が異なり, 文字列 2 とは 2 文字目が異なる. 残りの文字列についても同様である.

それでは, (♯) を背理法によって証明しよう. そのために, いったん結論を否定して

(♭) ○と×からなる長さ無限の文字列の全体は可算である

と仮定する. このとき, それらの文字列を順に並べれば

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
文字列 1 :	○	○	×	○	×	○	×	○	○	×	···
文字列 2 :	○	×	×	○	×	×	○	×	○	×	···
文字列 3 :	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	···
文字列 4 :	○	×	○	×	×	○	×	○	×	×	···
文字列 5 :	×	○	×	○	○	×	○	×	×	○	···
文字列 6 :	○	○	×	○	×	×	×	○	○	×	···
文字列 7 :	○	×	○	○	×	×	○	×	○	×	···
文字列 8 :	×	○	×	×	○	○	×	×	○	×	···
文字列 9 :	○	×	○	○	×	○	×	○	○	×	···
文字列 10 :	×	○	×	○	×	×	○	×	×	○	···
······											

のような形のリストを作ることができる. 先の例とは異なり, このリストは右にも下にも限りなく続いている. しかし, 先と同様にリストの対角線を反転させた (長さ無限の) 文字列 ×○×○×○×○×× ··· を考えると, これは上のリストにあるどの文字列とも異なる (その理由も同様である). このことは, 上のリストが全ての文字列を尽くしているということと矛盾する. よって仮定 (♭) は誤りであり, 示したかった (♯) が証明できたことになる. ここで用いたような "対角線" に注目する論法を**対角線論法**という. なお, 同様の方法により, 実数の全体は可算でないことを示すこともできる.

15 調和数

正の整数 n に対し, $1, 2, \ldots, n$ の逆数の和を H_n で表す:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

このような数を**調和数**という. 初めの 10 個の調和数を計算すると, 次のようになる:

$$H_1 = 1, \qquad H_2 = \frac{3}{2}, \qquad H_3 = \frac{11}{6}, \qquad H_4 = \frac{25}{12}, \qquad H_5 = \frac{137}{60},$$

$$H_6 = \frac{49}{20}, \qquad H_7 = \frac{363}{140}, \qquad H_8 = \frac{761}{280}, \qquad H_9 = \frac{7129}{2520}, \qquad H_{10} = \frac{7381}{2520}.$$

また, コンピュータを利用して H_n (の小数表示) を計算すると, 次の表が得られる:

n	H_n	n	H_n	n	H_n
2	1.5	200	$5.8780\cdots$	20000	$10.4807\cdots$
3	$1.8333\cdots$	300	$6.2826\cdots$	30000	$10.8861\cdots$
4	$2.0833\cdots$	400	$6.5699\cdots$	40000	$11.1738\cdots$
5	$2.2833\cdots$	500	$6.7928\cdots$	50000	$11.3970\cdots$
6	2.45	600	$6.9749\cdots$	60000	$11.5793\cdots$
7	$2.5928\cdots$	700	$7.1290\cdots$	70000	$11.7334\cdots$
8	$2.7178\cdots$	800	$7.2624\cdots$	80000	$11.8670\cdots$
9	$2.8289\cdots$	900	$7.3801\cdots$	90000	$11.9847\cdots$
10	$2.9289\cdots$	1000	$7.4854\cdots$	100000	$12.0901\cdots$
20	$3.5977\cdots$	2000	$8.1783\cdots$	200000	$12.7832\cdots$
30	$3.9949\cdots$	3000	$8.5837\cdots$	300000	$13.1887\cdots$
40	$4.2785\cdots$	4000	$8.8713\cdots$	400000	$13.4764\cdots$
50	$4.4992\cdots$	5000	$9.0945\cdots$	500000	$13.6995\cdots$
60	$4.6798\cdots$	6000	$9.2768\cdots$	600000	$13.8819\cdots$
70	$4.8328\cdots$	7000	$9.4309\cdots$	700000	$14.0360\cdots$
80	$4.9654\cdots$	8000	$9.5644\cdots$	800000	$14.1695\cdots$
90	$5.0825\cdots$	9000	$9.6822\cdots$	900000	$14.2873\cdots$
100	$5.1873\cdots$	10000	$9.7876\cdots$	1000000	$14.3927\cdots$

この表からは, n が小さい場合を除いて, n を 10 倍すると H_n はおおよそ 2.3 だけ増加していることが観察される. 本節では, 調和数 H_n が限りなく大きくなることを示す. また, その応用として, 同じ大きさのブロックを適切に積み上げれば最上段をいくらでも “前に出せる” ことや, 足し合わせる順番を入れ替えると値が変化する (無限) 和について述べる.

2 以上の整数の逆数の和

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots$$

を, 初めの 1 つの項, 次の 2 つの項, その次の 4 つの項, ... をまとめて

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

と見なすことにする. このとき, 括弧の中は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\\
&\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2},\\
&\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

のように, いずれも $\frac{1}{2}$ より大きな値になる. これより, n を大きくすれば H_n はいくらでも大きくなることがわかる. より正確には, $m=0,1,2,3,\ldots$ に対して

$$H_{2^m}\geq 1+\frac{m}{2}$$

が成り立つ. また,

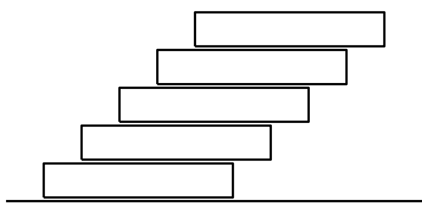
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}<1,\\
&\frac{1}{3}+\frac{1}{4}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,\\
&\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1,\\
&\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}<\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}=1
\end{aligned}$$

のように考えれば, $m=0,1,2,3,\ldots$ に対して

$$H_{2^m}\leq 1+m$$

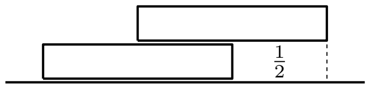
が成り立つこともわかる.

いま, ブロックを少しずつずらして積み上げて, 最上段をなるべく “前に出す” ことを考えよう:

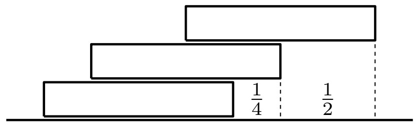


ただし, ブロックは全て同じ大きさで, その長さは 1 であるとする．また, 重力の影響も考慮するものとする．従って, 前に出し過ぎるとブロックは崩れてしまう．

ブロックが 2 個の場合, 容易にわかるように, 上のブロックを下のブロックから $\frac{1}{2}$ だけ出すことができる:



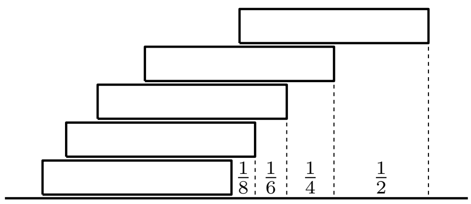
実際, 上のブロックの重心は右端から $\frac{1}{2}$ の地点で, その重心が下のブロックの右端にあるとき, 最も前に出ているという訳である．このように積まれた 2 つのブロック全体の重心は, 下のブロックの右端から $\frac{1}{4}$ の地点になる．従って, ブロックが 3 個の場合には, 上から順に $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ だけずらして積むことができる:



このとき, 最上段のブロックは最下段のブロックよりも $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ だけ前に出ている．同様に考えて行くと, ブロックが何個あったとしても, 上から順に $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$ だけずらして積めば, (理論上では) ぎりぎり崩れないことがわかる．このような方法で n 個のブロックを積み重ねると, 最上段のブロックは最下段のブロックよりも

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2(n-1)}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{H_{n-1}}{2}$$

だけ前に出ていることになる．例えば $n=5$ のとき, ブロックは $\frac{H_4}{2}=\frac{25}{24}$ (>1) だけ前に出ている:



つまり, 5 個のブロックを適切に積み上げれば, (理論上は) 最上段の後端を最下段の先端よりも前に出すことができる．なお, 証明は与えないが, ここで述べた方法が最も前に出る積み方である．

ところで, 先に示したように調和数 H_n は限りなく大きくなる．このことから,

ブロックが無数に使えるならば, 最上段のブロックはいくらでも前に出せる

ということがわかる．

さて, 調和数 H_n が限りなく大きくなるということは, 次のように表すこともできる:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots=\infty.$$

これより, 正の偶数の逆数の総和や正の奇数の逆数の総和も限りなく大きくなることがわかる:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\right)=\infty,$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots>\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\right)=\infty.$$

しかし, 奇数の逆数には $+$, 偶数の逆数には $-$ をつけて足し合わせた

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\cdots$$

は有限な値に収束する. 実際, 途中までの和を順に計算して行くと, $S=0.6931\cdots$ であることが観察される. 他方, 足し合わせる順番を入れ替えた

$$T=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\cdots$$

について同様の計算を行うと, $T=0.3465\cdots$ であることが観察される. つまり, T は S と同じものを足し合わせたにも関わらず, その値はおおよそ半分になっている! この奇妙な現象は, 以下のように証明することができる:

$$\begin{aligned}
T&=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\cdots\\
&=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{14}\right)-\frac{1}{16}+\cdots\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\cdots\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots\right)=\frac{1}{2}S.
\end{aligned}$$

なお, 足し合わせる順番をさらに替えた

$$U=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}+\cdots$$

の値は $\frac{3}{2}S=3T$ に一致することが示せる.