

複素数と平面幾何*

佐藤 篤†

目 次

1	複素数	2
2	複素平面	6
3	極形式	10
4	累乗根	16
5	Euler の公式	19
6	直線の方程式	21
7	円の方程式	26
8	相似変換と合同変換	30
9	三角形の相似条件と合同条件	34
10	三角形の五心	38
11	九点円	42
12	Morley の定理	46
	参考文献	48
	問題略解	49

*幾何学 I (2016–2020 年度, 於 東北学院大学) 講義ノートに加筆修正 [2024 年 2 月 16 日版]

†東北学院大学情報学部 (E-mail: atsushi@mail.tohoku-gakuin.ac.jp)

1 複素数

複素数とは $a, b \in \mathbb{R}$ と虚数単位と呼ばれる記号 i を用いて $a + ib$ (または $a + bi$) と表される “数” であった. 相等関係は

$$a + ib = a' + ib' \iff a = a' \text{ かつ } b = b'$$

($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$) により定義される. なお $a \in \mathbb{R}$ は複素数 $a + i0$ であると思なす. 以下では複素数全体のなす集合を $\mathbb{C}$ で表す.

複素数の加法・減法と乗法は, それぞれ

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d), \quad (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) により定義される. これらは実数の加法・減法と乗法を拡張したものになっている. また, 上のように定めた演算により, 集合 $\mathbb{C}$ は加減乗除の四則が “普通” にできる集合 (体^{たい}という) になる. 従って, 複素数の四則の計算を行う際には, i を変数 (文字) と見なして実数の場合と同様に計算し, i^2 が現れたら -1 で置き換えればよい.

例 1.1 $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ (この記号は以下でも全体を通して用いられる) とするとき,

$$\omega^2 = \frac{(-1 + i\sqrt{3})^2}{2^2} = \frac{1 - 2i\sqrt{3} + 3i^2}{2^2} = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2^2} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\omega - 1.$$

つまり $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ が成り立つ. また

$$\omega^3 = \omega \cdot \omega^2 = \omega(-\omega - 1) = -\omega^2 - \omega = -(-\omega - 1) - \omega = 1.$$

問 1.2 次の等式が成り立つことを確認せよ:

$$(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma)(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha.$$

注意 1.3 集合 $\mathbb{R}$ には大小関係が定義されていて, $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して

$$(a) \quad a < b \text{ かつ } c > 0 \implies ca < cb,$$

$$(b) \quad a < b \text{ かつ } c < 0 \implies ca > cb$$

等が成り立っている. しかし, これらの性質を保ったまま, 集合 $\mathbb{C}$ に大小関係を拡張することはできない.

問 1.4 上の条件 (a), (b) を共にみたすように, $\mathbb{R}$ の大小関係が $\mathbb{C}$ に拡張できたと仮定すると, $i > 0$ としても $i < 0$ としても矛盾が生じることを示せ.

実部と虚部 $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) に対し, a を α の実部といい $\operatorname{Re} \alpha$ で表す. また, b を α の虚部といい $\operatorname{Im} \alpha$ で表す. 実部が 0 であるような複素数を純虚数という (0 は純虚数とは呼ばない流儀もある).

問 1.5 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ と $k \in \mathbb{R}$ に対して次が成り立つことを示せ:

$$\operatorname{Re}(\alpha + \beta) = \operatorname{Re} \alpha + \operatorname{Re} \beta, \quad \operatorname{Im}(\alpha + \beta) = \operatorname{Im} \alpha + \operatorname{Im} \beta, \quad \operatorname{Re}(k\alpha) = k \operatorname{Re} \alpha, \quad \operatorname{Im}(k\alpha) = k \operatorname{Im} \alpha,$$

$$\operatorname{Re}(i\alpha) = -\operatorname{Im} \alpha, \quad \operatorname{Im}(i\alpha) = \operatorname{Re} \alpha.$$

例 1.6 i の平方根, すなわち $z^2 = i$ をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求めるためには, 以下のような計算を行えばよい:

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) と置くと, $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ となるから,

$$z^2 = i \iff x^2 - y^2 = 0 \text{ かつ } 2xy = 1.$$

$x^2 - y^2 = 0$ より $y = \pm x$ がわかる. ここで:

(1) $y = x$ の場合には, $2xy = 2x^2$ となるから, 方程式 $2x^2 = 1$ を解いて $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ を得る.

(2) $y = -x$ の場合には, $2xy = -2x^2$ となるが, 方程式 $-2x^2 = 1$ は実数解をもたない.

以上より

$$z = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

問 1.7 上の例で求めた z が実際に i の平方根となっていることを確かめよ.

複素共役 $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) に対し, $a - ib$ を α の複素共役といい $\bar{\alpha}$ で表す. つまり

$$\operatorname{Re} \bar{\alpha} = \operatorname{Re} \alpha, \quad \operatorname{Im} \bar{\alpha} = -\operatorname{Im} \alpha.$$

命題 1.8

$$\bar{\bar{\alpha}} = \alpha, \quad \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} = \operatorname{Re} \alpha, \quad \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i} = \operatorname{Im} \alpha.$$

[証明] $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とすると,

$$\bar{\bar{\alpha}} = \overline{a - ib} = a + ib = \alpha.$$

また

$$\alpha + \bar{\alpha} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2 \operatorname{Re} \alpha, \quad \alpha - \bar{\alpha} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2i \operatorname{Im} \alpha. \quad \square$$

系 1.9

$$\alpha \text{ は実数} \iff \bar{\alpha} = \alpha, \quad \alpha \text{ は純虚数} \iff \bar{\alpha} = -\alpha.$$

命題 1.10

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}.$$

また, $\beta \neq 0$ のとき

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}.$$

[証明] $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) とすると,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha + \beta} &= \overline{(a + c) + i(b + d)} = (a + c) - i(b + d) = (a - ib) + (c - id) = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \\ \overline{\alpha\beta} &= \overline{(ac - bd) + i(ad + bc)} = (ac - bd) - i(ad + bc) = (a - ib)(c - id) = \bar{\alpha}\bar{\beta}. \end{aligned}$$

また, $\beta \neq 0$ とすると

$$\bar{\beta} \cdot \overline{\left(\frac{1}{\beta}\right)} = \bar{\beta} \cdot \frac{1}{\bar{\beta}} = \bar{1} = 1$$

より

$$\overline{\left(\frac{1}{\beta}\right)} = \frac{1}{\bar{\beta}}$$

がわかるから,

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \overline{\alpha \cdot \frac{1}{\beta}} = \bar{\alpha} \cdot \overline{\left(\frac{1}{\beta}\right)} = \bar{\alpha} \cdot \frac{1}{\bar{\beta}} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}.$$

□

問 1.11 次の成り立つことを示せ:

$$\overline{\alpha - \beta} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha \beta} = \bar{\alpha} \bar{\beta}.$$

絶対値 $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) に対し, $\sqrt{a^2 + b^2}$ を α の絶対値といい $|\alpha|$ で表す. $b = 0$ のときには

$$|\alpha| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geq 0 \text{ の場合}) \\ -a & (a < 0 \text{ の場合}) \end{cases}$$

となるから, この定義は実数の (通常の) 絶対値を拡張したものになっている. また, 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $|\alpha| \geq 0$ が成り立ち, $|\alpha| = 0$ となるのは $\alpha = 0$ である場合に限る.

命題 1.12

$$|-\alpha| = |\alpha|, \quad |\bar{\alpha}| = |\alpha|, \quad \alpha \bar{\alpha} = |\alpha|^2.$$

[証明] $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とすると,

$$|-\alpha| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha|, \quad |\bar{\alpha}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha|.$$

また

$$\alpha \bar{\alpha} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |\alpha|^2.$$

□

系 1.13 $\beta \neq 0$ のとき

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \bar{\beta}}{|\beta|^2}.$$

注意 1.14 上の系において $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) とすると

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}$$

が得られる.

例 1.15

$$(\alpha + \beta) \overline{(\alpha + \beta)} = (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) = \alpha \bar{\alpha} + \alpha \bar{\beta} + \bar{\alpha} \beta + \beta \bar{\beta}$$

より

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + \alpha \bar{\beta} + \bar{\alpha} \beta + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2 \operatorname{Re}(\alpha \bar{\beta}) + |\beta|^2.$$

同様にして

$$|\alpha - \beta|^2 = |\alpha|^2 - \alpha \bar{\beta} - \bar{\alpha} \beta + |\beta|^2 = |\alpha|^2 - 2 \operatorname{Re}(\alpha \bar{\beta}) + |\beta|^2$$

もわかる.

命題 1.16

$$|\alpha\beta| = |\alpha| |\beta|.$$

また, $\beta \neq 0$ のとき

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}.$$

[証明] まず

$$|\alpha\beta|^2 = (\alpha\beta) \overline{(\alpha\beta)} = (\alpha\beta)(\bar{\alpha} \bar{\beta}) = (\alpha \bar{\alpha})(\beta \bar{\beta}) = |\alpha|^2 |\beta|^2 = (|\alpha| |\beta|)^2$$

より前者の等式を得る. また, $\beta \neq 0$ とすると

$$|\beta| \left| \frac{1}{\beta} \right| = \left| \beta \cdot \frac{1}{\beta} \right| = |1| = 1$$

より

$$\left| \frac{1}{\beta} \right| = \frac{1}{|\beta|}$$

がわかるから,

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \left| \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \right| = |\alpha| \left| \frac{1}{\beta} \right| = |\alpha| \frac{1}{|\beta|} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}.$$

□

系 1.17 $\alpha \neq 0$ とするとき

$$\left| \frac{\alpha}{|\alpha|} \right| = 1.$$

問 1.18 $\alpha \neq 0$ とするとき, 次が成り立つことを示せ:

$$\left(\frac{\alpha}{|\alpha|} \right)^2 = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}.$$

問 1.19 $\alpha\beta \neq 0$ とするとき, 次が成り立つことを示せ:

$$\left| \frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{\beta}{|\beta|} \right|^2 = \frac{(|\alpha| + |\beta| + |\alpha - \beta|)(|\alpha| + |\beta| - |\alpha - \beta|)}{|\alpha\beta|}.$$

演習問題

1.1 次の複素数の実部と虚部を求めよ:

$$(-i)^3, \quad (2+3i) \overline{(3+2i)}, \quad \frac{3+4i}{|3+4i|}, \quad \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}, \quad \frac{5-3i}{5+3i} + \frac{5+3i}{5-3i}.$$

1.2 $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ とするとき, 次が成り立つことを示せ:

$$\overline{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}, \quad \overline{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma}, \quad \overline{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

2 複素平面

$\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) に点 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ を対応させることにより, 複素数全体のなす集合 $\mathbb{C}$ を (実) 平面 $\mathbb{R}^2$ と同一視したものを複素平面 (または **Gauss** 平面) という. 例えば複素平面の原点は 0 に対応する. また, 複素平面の横軸は実数の全体 (通常の数直線) に対応し, 縦軸は純虚数の全体に対応する. これらの座標軸をそれぞれ**実軸**, **虚軸**という.

以下では, 複素数のことを“点”と呼ぶこともある. また, いくつかの点 (複素数) が同一直線上にあるとき, これらは**共線**であるという. 定義から明らかなように, 2 個以下の点は常に共線である. また, 3 個の点が共線でないとは, これらの点を頂点とする三角形が作れることを意味する.

加法・減法と実数倍の図形的な意味 複素数の加法・減法は, 複素平面では (平面) ベクトルの加法・減法に対応する:

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d) \quad \longleftrightarrow \quad (a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d)$$

($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). また, 複素数の実数倍はベクトルのスカラー倍に対応する:

$$k(a + ib) = ka + ikb \quad \longleftrightarrow \quad k(a, b) = (ka, kb)$$

($a, b, k \in \mathbb{R}$). 従って, 平面ベクトルの加法・減法とスカラー倍だけを用いた議論は, 複素数を使って書き直することができる. なお, 複素数の差 $\beta - \alpha$ は, α を始点, β を終点とする矢線ベクトル (有向線分) と同一視することもできるため, $\overrightarrow{\alpha\beta}$ と書くこともある. さらに, $\alpha (= \alpha - 0)$ を $\overrightarrow{\alpha}$ と書くこともある.

例 2.1 $m, n \in \mathbb{R}$ ($m > 0, n > 0$) とするとき, 相異なる 2 点 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\alpha \neq \beta$) を結ぶ線分を $m : n$ に内分する点は

$$\alpha + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{\alpha\beta} = \alpha + \frac{m}{m+n} (\beta - \alpha) = \frac{n\alpha + m\beta}{m+n}.$$

また, $m \neq n$ のとき, $m : n$ に外分する点は

$$\alpha + \frac{m}{m-n} \overrightarrow{\alpha\beta} = \alpha + \frac{m}{m-n} (\beta - \alpha) = \frac{-n\alpha + m\beta}{m-n}.$$

例 2.2 相異なる 2 点 α, β を通る直線は, “方向ベクトル” として $\overrightarrow{\alpha\beta} = \beta - \alpha$ をとることができるから, パラメータ t を用いて

$$\alpha + t \overrightarrow{\alpha\beta} = \alpha + t(\beta - \alpha) = (1-t)\alpha + t\beta \quad (t \in \mathbb{R})$$

と表すことができる.

問 2.3 3 点 α, β, γ が共線でないとき, これら 3 点を頂点にもつ平行四辺形の残りの頂点 (ひとつではないことに注意せよ) を求めよ.

複素共役と絶対値の図形的な意味 $\alpha \in \mathbb{C}$ の複素共役 $\bar{\alpha}$ は, 複素平面においては, α と実軸に関して対称な点となる (虚軸に関して対称な点は $-\bar{\alpha}$ で与えられる). また, 絶対値 $|\alpha|$ ($= |\vec{\alpha}|$) は原点と α の距離に一致し, $|\beta - \alpha|$ ($= |\vec{\alpha\beta}|$) は α と β の距離に一致する. これらは, 対応するベクトルのノルム (長さ) でもある.

例 2.4 点 α を中心とする半径 r の円は, 方程式

$$|z - \alpha| = r$$

により与えられる. 特に, 単位円 (原点を中心とする半径 1 の円) は $|z| = 1$ により与えられる.

例 2.5 単位円上の相異なる 2 点 α, β と $t \in \mathbb{R}$ に対し, $\gamma = (1-t)\alpha + t\beta$ と置くと, $|\alpha| = |\beta| = 1$ より,

$$|\gamma|^2 = |(1-t)\alpha + t\beta|^2 = (1-t)^2|\alpha|^2 + t(1-t)(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + t^2|\beta|^2 = 1 + t(1-t)(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta - 2).$$

ここで,

$$|\alpha - \beta|^2 = |\alpha|^2 - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + |\beta|^2 = -\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + 2$$

であるから,

$$1 - |\gamma|^2 = t(1-t)|\alpha - \beta|^2$$

が成り立つ. 他方,

$$\gamma - \alpha = -t(\alpha - \beta), \quad \gamma - \beta = (1-t)(\alpha - \beta)$$

より

$$(\gamma - \alpha)\overline{(\gamma - \beta)} = -t(1-t)|\alpha - \beta|^2.$$

従って

$$1 - |\gamma|^2 = -(\gamma - \alpha)\overline{(\gamma - \beta)}$$

となり, これより

$$|1 - |\gamma|^2| = |\gamma - \alpha||\gamma - \beta|$$

を得る.

問 2.6 (1) 次の等式を示せ:

$$|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2).$$

(2) 上で示した等式の図形的な意味を考えよ.

三角不等式 三角形の 2 つの辺の長さの和は, 残る一辺の長さよりも大きい. 三角不等式とは, この一見当たり前の事実を定式化したものである.

補題 2.7

$$\max(|\operatorname{Re} \alpha|, |\operatorname{Im} \alpha|) \leq |\alpha| \leq |\operatorname{Re} \alpha| + |\operatorname{Im} \alpha|.$$

ここで $\max(|\operatorname{Re} \alpha|, |\operatorname{Im} \alpha|)$ は $|\operatorname{Re} \alpha|$ と $|\operatorname{Im} \alpha|$ の大きい方を表す.

[証明] $a = \operatorname{Re} \alpha$, $b = \operatorname{Im} \alpha$ と置くと, $a^2 \leq a^2 + b^2$ と $b^2 \leq a^2 + b^2$ より

$$|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \quad |b| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

がわかる. また

$$a^2 + b^2 = |a|^2 + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

より

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$$

もわかる. □

注意 2.8 上の証明からわかるように

$$|\operatorname{Re} \alpha| = |\alpha| \iff \alpha \text{ は実数}, \quad |\operatorname{Im} \alpha| = |\alpha| \iff \alpha \text{ は純虚数}.$$

また

$$|\alpha| = |\operatorname{Re} \alpha| + |\operatorname{Im} \alpha| \iff \alpha \text{ は実数または純虚数}.$$

命題 2.9 (三角不等式)

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|, \quad |\alpha + \beta| \geq ||\alpha| - |\beta||.$$

[証明] $|\alpha + \beta|$ と $|\alpha| + |\beta|$ を 2 乗すると

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + 2\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta}) + |\beta|^2, \quad (|\alpha| + |\beta|)^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha\beta| + |\beta|^2.$$

ここで, 補題より

$$\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta}) \leq |\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta})| \leq |\alpha\bar{\beta}|$$

が成り立つが, $|\alpha\bar{\beta}| = |\alpha||\bar{\beta}| = |\alpha||\beta| = |\alpha\beta|$ であるから, 前者の不等式が得られる. また,

$$|\alpha| = |(\alpha + \beta) + (-\beta)| \leq |\alpha + \beta| + |-\beta| = |\alpha + \beta| + |\beta|$$

より

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha + \beta|$$

がわかる. 同様にして

$$|\beta| - |\alpha| \leq |\alpha + \beta|$$

もわかるから, 後者の不等式が得られる. □

系 2.10

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|.$$

系 2.11 $|\alpha| > |\beta|$ であるとき

$$\frac{1}{|\alpha + \beta|} \leq \frac{1}{|\alpha| - |\beta|}.$$

注意 2.12 命題 2.9 の証明からわかるように, 三角不等式

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

において等号が成立するのは, $\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta}) = |\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta})| = |\alpha\bar{\beta}|$ であるときに限る. ここで, 注意 2.8 より

$$|\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta})| = |\alpha\bar{\beta}| \iff \alpha\bar{\beta} \text{ は実数}$$

であるから,

$$\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta}) = |\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta})| = |\alpha\bar{\beta}| \iff \alpha\bar{\beta} \text{ は } 0 \text{ または正の実数.}$$

以上より

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \iff \alpha\bar{\beta} = 0 \text{ または } \alpha\bar{\beta} \text{ は正の実数.}$$

なお, $\alpha\bar{\beta} \neq 0$ のとき $\alpha\bar{\beta} = |\beta|^2 \frac{\alpha}{\beta}$ であるから, 次のように書いてもよい:

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \iff \alpha\bar{\beta} = 0 \text{ または } \frac{\alpha}{\beta} \text{ は正の実数.}$$

演習問題

2.1 $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ を単位円上の相異なる 4 点とする. また, α, β を通る直線と α', β' を通る直線は点 γ で交わるとする.

(1) 次の等式を示せ:

$$|\gamma - \alpha| |\gamma - \beta| = |\gamma - \alpha'| |\gamma - \beta'|.$$

(2) 上で示した等式の図形的な意味を考えよ.

2.2 (1) $|\alpha| < 1$ ならば $\operatorname{Re} \frac{1+\alpha}{1-\alpha} > 0$ となることを示せ.

(2) $\operatorname{Im} \alpha > 0$ ならば $\left| \frac{\alpha-i}{\alpha+i} \right| < 1$ となることを示せ.

3 極形式

$\alpha \in \mathbb{C}$ ($\alpha \neq 0$) の絶対値を r とすると, α に対応する複素平面上の点は原点を中心とする半径 r の円上にあるから,

$$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

をみたす $\theta \in \mathbb{R}$ が存在する. この表示を極形式という. また, θ を α の偏角といい $\arg \alpha$ で表す. なお 0 の偏角は定義しない.

例 3.1 偏角が 0 の数とは正の実数のことであり, 偏角が π の数とは負の実数のことである.

命題 3.2 $r, r' \in \mathbb{R}$ ($r, r' > 0$) と $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ に対して

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) = r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \iff r = r' \text{ かつ } \theta - \theta' \text{ は } 2\pi \text{ の整数倍.}$$

[証明] まず $r(\cos \theta + i \sin \theta) = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ とすると,

$$|r(\cos \theta + i \sin \theta)| = |r|\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = r, \quad |r'(\cos \theta' + i \sin \theta')| = |r'|\sqrt{\cos^2 \theta' + \sin^2 \theta'} = r'$$

より $r = r'$ が直ちにわかる. また, このとき $\cos \theta + i \sin \theta = \cos \theta' + i \sin \theta'$, すなわち $\cos \theta = \cos \theta'$ かつ $\sin \theta = \sin \theta'$ となるから, $\theta - \theta'$ は 2π の整数倍である.

逆に $r = r'$ かつ $\theta - \theta' = 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) とすると,

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) = r'(\cos(\theta' + 2\pi n) + i \sin(\theta' + 2\pi n)) = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

が成り立つ. □

上の命題からわかるように, 偏角は 2π の整数倍だけの差を除いて一意的に定まる.

例 3.3 (1) 虚数単位 i の極形式表示は

$$i = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

で与えられる. また $-i$ の極形式表示は

$$-i = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

で与えられる. なお $\frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$ であるから,

$$-i = 1 \cdot \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

と表すこともできる.

(2) $\pm 1 + i$ の極形式表示は

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad -1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

で与えられる。また $\pm 1 - i$ の極形式表示は

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right), \quad -1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

で与えられる。なお $\frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$ であるから,

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right), \quad -1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

と表すこともできる。

乗法・除法と極形式表示

命題 3.4 $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ に対して

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi), \quad \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \cos(\theta - \varphi) + i \sin(\theta - \varphi).$$

[証明] まず

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i(\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi).$$

他方, 加法定理より

$$\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i(\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi).$$

これより前者の等式を得る。また

$$\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \frac{(\cos \theta + i \sin \theta) \overline{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}}{|\cos \varphi + i \sin \varphi|^2} = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

であるから,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi - i \sin \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) + i(-\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi)$$

と

$$\cos(\theta - \varphi) + i \sin(\theta - \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) + i(\sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi)$$

より後者の等式を得る。 □

系 3.5 (de Moivre の公式) $\theta \in \mathbb{R}$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\alpha, \beta \neq 0$) の極形式表示をそれぞれ

$$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \beta = s(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

とすると, 命題 3.4 より, 積や商の極形式表示は

$$\alpha\beta = (rs)(\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)), \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{r}{s} (\cos(\theta - \varphi) + i \sin(\theta - \varphi))$$

により与えられることがわかる。これより直ちに命題 1.16 の別証明が得られる。さらに:

命題 3.6 $\alpha, \beta \neq 0$ に対して

$$\arg(\alpha\beta) = \arg \alpha + \arg \beta, \quad \arg \frac{\alpha}{\beta} = \arg \alpha - \arg \beta.$$

ただし 2π の整数倍だけの差は無視する (以下でも同様).

問 3.7 $\alpha \neq 0$ に対して

$$\arg(-\alpha) = \arg \alpha + \pi, \quad \arg \bar{\alpha} = -\arg \alpha$$

を示せ.

命題 3.8 $\alpha, \beta \neq 0$ に対して:

$$\arg \alpha = \arg \beta \iff \frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{\beta}{|\beta|} \iff \frac{\alpha}{\beta} \text{ は正の実数} \iff \alpha \bar{\beta} \text{ は正の実数.}$$

[証明] $\theta = \arg \alpha$, $\varphi = \arg \beta$ と置くと,

$$\frac{\alpha}{|\alpha|} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \frac{\beta}{|\beta|} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

ならびに

$$\arg \frac{\alpha}{\beta} = \arg(\alpha \bar{\beta}) = \theta - \varphi$$

が成り立つことによる. □

乗法・除法の図形的な意味 $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\alpha \neq 0$) の極形式表示を $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とするとき, 複素数に α を掛けると, 絶対値には r が掛けられ, 偏角には θ が足される. また, 複素数を α で割ると, 絶対値は r で割られ, 偏角からは θ が引かれる. つまり, α を掛けたり α で割ったりするという操作は, 原点を中心とする拡大・縮小と (原点を中心とする) 回転を同時に行うことに他ならない.

例 3.9 絶対値が 1 であるような複素数 $\cos \theta + i \sin \theta$ を掛けるという操作は, 原点を中心として θ だけ (左回りに) 回転することに他ならない. 特に

$$\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i, \quad \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \omega$$

より, i を掛けることは $\frac{\pi}{2}$ の回転を意味し, ω を掛けることは $\frac{2\pi}{3}$ の回転を意味する.

例 3.10 α, β, γ を共線でない 3 点とすると,

$$\theta := \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \arg(\gamma - \alpha) - \arg(\beta - \alpha)$$

は $\triangle \alpha\beta\gamma$ の頂点 α における角を表す. より正確には, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ をみたすように偏角を選ぶと, 次が成り立つ:

- (1) $0 < \theta < \pi$ であれば, 3 点 α, β, γ は左回りに位置し, 頂点 α における角の大きさは θ に一致する;
- (2) $-\pi < \theta < 0$ であれば, 3 点 α, β, γ は右回りに位置し, 頂点 α における角の大きさは $|\theta|$ に一致する.

なお, 3 点は共線ではないから, θ が 0 や $\pm\pi$ となることはない.

命題 3.11 相異なる 3 点 α, β, γ に対して次の条件 (a)–(c) は互いに同値である:

- (a) $\triangle\alpha\beta\gamma$ は正三角形.
- (b) $\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0$ または $\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma = 0$.
- (c) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$.

[証明]

$$\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = -\omega^2, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = -\omega$$

より, (a) は

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = -\omega^2 \quad \text{または} \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = -\omega$$

と同値であることがわかる. ここで, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ と $\omega^3 = 1$ より

$$\gamma - \alpha + \omega^2(\beta - \alpha) = (-\omega^2 - 1)\alpha + \omega^2\beta + \gamma = \omega\alpha + \omega^2\beta + \gamma = \omega(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma),$$

$$\gamma - \alpha + \omega(\beta - \alpha) = (-\omega - 1)\alpha + \omega\beta + \gamma = \omega^2\alpha + \omega\beta + \gamma = \omega^2(\alpha + \omega\beta + \omega\gamma).$$

これより (a) と (b) が同値であることがわかる. これらの条件が (c) と同値であることは

$$(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma)(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha$$

(cf. 問 1.2) による. □

問 3.12 相異なる 2 点 α, β に対し, これら 2 点を頂点にもつ正方形の残りの頂点 (ひと組ではないことに注意せよ) を求めよ.

例 3.13 相異なる 3 点 α, β, γ が $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ をみたすとする. このとき

$$\left(\frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha|}\right)^2 = \frac{\beta - \alpha}{\bar{\beta} - \bar{\alpha}} = \frac{\beta - \alpha}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha\beta(\beta - \alpha)}{\alpha - \beta} = -\alpha\beta.$$

同様にして

$$\left(\frac{\gamma - \alpha}{|\gamma - \alpha|}\right)^2 = -\alpha\gamma$$

もわかるから,

$$\left(\frac{\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}}{|\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}|}\right)^2 = \frac{\gamma}{\beta}.$$

これより

$$2 \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \arg \frac{\gamma}{\beta}$$

を得る.

問 3.14 上の例において, 最後の等式の図形的な意味を考えよ.

命題 3.15 $\alpha\beta \neq 0$ とするとき:

- (1) $\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta})$ は α, β に対応するベクトルの内積に一致する.
- (2) $\operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta})$ の絶対値は 4 点 $0, \alpha, \beta, \alpha + \beta$ を頂点とする平行四辺形の面積に一致する.

[証明] α, β の極形式表示をそれぞれ $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $\beta = s(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ とすると,

$$\alpha \bar{\beta} = (rs)(\cos(\theta - \varphi) + i \sin(\theta - \varphi)).$$

ここで, $\theta - \varphi$ (の絶対値) は α, β に対応するベクトルのなす角に他ならない. 従って:

(1) $\operatorname{Re}(\alpha \bar{\beta}) = rs \cos(\theta - \varphi)$ は α, β に対応するベクトルの内積に一致する.

(2) $\operatorname{Im}(\alpha \bar{\beta}) = rs \sin(\theta - \varphi)$ の絶対値は 0, $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ を頂点とする平行四辺形の面積に一致する. $\square$

平行条件と垂直条件

命題 3.16 $\alpha \neq \beta$ かつ $\gamma \neq \delta$ とするとき:

(1)

$$\vec{\alpha\beta} // \vec{\gamma\delta} \iff \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} \text{ は実数} \iff (\beta - \alpha)(\bar{\delta} - \bar{\gamma}) - (\bar{\beta} - \bar{\alpha})(\delta - \gamma) = 0.$$

(2)

$$\vec{\alpha\beta} \perp \vec{\gamma\delta} \iff \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} \text{ は純虚数} \iff (\beta - \alpha)(\bar{\delta} - \bar{\gamma}) + (\bar{\beta} - \bar{\alpha})(\delta - \gamma) = 0.$$

[証明] (1) $\vec{\alpha\beta} // \vec{\gamma\delta}$ とは $\delta - \gamma = t(\beta - \alpha)$ をみたす $t \in \mathbb{R}$ ($t \neq 0$) が存在することを意味する. これより初めの同値性が直ちにわかる. また

$$\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} \text{ は実数} \iff \overline{\left(\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha}\right)} = \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} \iff (\beta - \alpha)(\bar{\delta} - \bar{\gamma}) - (\bar{\beta} - \bar{\alpha})(\delta - \gamma) = 0.$$

(2) $\vec{\alpha\beta} \perp \vec{\gamma\delta}$ とは $\delta - \gamma = it(\beta - \alpha)$ をみたす $t \in \mathbb{R}$ ($t \neq 0$) が存在することを意味する. これより初めの同値性が直ちにわかる. また

$$\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} \text{ は純虚数} \iff \overline{\left(\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha}\right)} = -\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} \iff (\beta - \alpha)(\bar{\delta} - \bar{\gamma}) + (\bar{\beta} - \bar{\alpha})(\delta - \gamma) = 0. \quad \square$$

命題 3.17 3 点 α, β, γ に対して

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ は共線} \iff \alpha \bar{\beta} + \beta \bar{\gamma} + \gamma \bar{\alpha} \text{ は実数} \iff \alpha \bar{\beta} + \beta \bar{\gamma} + \gamma \bar{\alpha} - \bar{\alpha} \beta - \bar{\beta} \gamma - \bar{\gamma} \alpha = 0.$$

[証明] まず $\alpha \neq \beta$ かつ $\alpha \neq \gamma$ とすると, 命題 3.16 の (1) より

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ は共線} \iff \vec{\alpha\beta} // \vec{\alpha\gamma} \iff (\beta - \alpha)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) - (\bar{\beta} - \bar{\alpha})(\gamma - \alpha) = 0.$$

ここで

$$(\beta - \alpha)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) - (\bar{\beta} - \bar{\alpha})(\gamma - \alpha) = \alpha \bar{\beta} + \beta \bar{\gamma} + \gamma \bar{\alpha} - \bar{\alpha} \beta - \bar{\beta} \gamma - \bar{\gamma} \alpha = 2i \operatorname{Im}(\alpha \bar{\beta} + \beta \bar{\gamma} + \gamma \bar{\alpha})$$

であるから, 求める同値性が得られる. 次に $\alpha = \beta$ とすると, α, β, γ は明らかに共線で, $\alpha \bar{\beta} + \beta \bar{\gamma} + \gamma \bar{\alpha} = |\alpha|^2 + \alpha \bar{\gamma} + \bar{\alpha} \gamma$ は実数である. $\alpha = \gamma$ の場合も同様. $\square$

注意 3.18 上の命題の最後の条件は, 3 次の行列式を使えば

$$\begin{vmatrix} \alpha & \bar{\alpha} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \\ \gamma & \bar{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

と書くことができる.

問 3.19 3 点 α, β, γ が共線でないとき, $\triangle\alpha\beta\gamma$ の面積は

$$\frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\alpha})|$$

に一致することを示せ.

演習問題

3.1 次の複素数の極形式表示を求めよ:

$$-4, \quad 5i, \quad -\sqrt{3} + i, \quad -\sqrt{3} - 3i, \quad \frac{1}{1+i}.$$

3.2 3 点 α, β, γ が $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ と $\alpha + \beta + \gamma = 0$ をみたすとき:

- (1) α, β, γ は相異なることを示せ.
- (2) $\triangle\alpha\beta\gamma$ は正三角形であることを示せ.

4 累乗根

1 の累乗根 $n \in \mathbb{Z}$ ($n > 0$) とし, 方程式 $z^n = 1$ をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求めることを考える. $z = 0$ は明らかに方程式をみたさないのて, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と極形式に表示する. このとき $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ の絶対値は r^n , 偏角は $n\theta$ であるから,

$$z^n = 1 \iff r^n = 1 \text{ かつ } n\theta \text{ は } 2\pi \text{ の整数倍} \iff r = 1 \text{ かつ } \frac{n\theta}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

従って, 方程式の解は $\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$ ($k \in \mathbb{Z}$) となる. ここで, $k, l \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} = \cos \frac{2\pi l}{n} + i \sin \frac{2\pi l}{n} \iff \frac{2\pi k}{n} - \frac{2\pi l}{n} \text{ は } 2\pi \text{ の整数倍} \iff \frac{k-l}{n} \in \mathbb{Z}$$

が成り立つことに注意すると, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ としたものが相異なる解となることがわかる:

命題 4.1 1 の n 乗根, すなわち方程式 $z^n = 1$ の解の全体は

$$1, \quad \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \quad \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

により与えられる.

注意 4.2 1 の n 乗根の全体は, $n \geq 3$ の場合には, 原点を中心とし 1 をひとつの頂点とする正 n 角形の頂点をなす. なお $\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ を ζ と置くと, de Moivre の公式 (系 3.5) より $\zeta^k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$ が成り立つから,

$$1, \quad \zeta, \quad \zeta^2, \quad \dots, \quad \zeta^{n-1}$$

と表すこともできる.

例 4.3 (1) $n = 4$ の場合. $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$ より, $z^4 = 1$ の解は

$$1, \quad i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i.$$

(2) $n = 3$ の場合. $\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \omega$ より, $z^3 = 1$ の解は

$$1, \quad \omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

(3) $n = 6$ の場合. $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = -\omega^2$ より, $z^6 = 1$ の解は

$$1, \quad -\omega^2, \quad (-\omega^2)^2 = \omega^4 = \omega, \quad (-\omega^2)^3 = -\omega^6 = -1, \quad (-\omega^2)^4 = \omega^8 = \omega^2, \quad (-\omega^2)^5 = -\omega^{10} = -\omega.$$

$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + \dots + z + 1)$ より, 方程式 $z^{n-1} + \dots + z + 1 = 0$ の解は 1 の n 乗根の全体から 1 を除いたものになる.

例 4.4 方程式 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ の解は

$$\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}, \quad \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}, \quad \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}, \quad \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}$$

となる。さて、 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ の両辺を z^2 で割って整理すると

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

とできるから、方程式は

$$z + \frac{1}{z} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

すなわち

$$z^2 - \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} z + 1 = 0$$

と同値である。この (実数係数の) 2 次方程式を解いて

$$z = \frac{-1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{-1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

得られた 4 個の解の実部と虚部の正負に注意することにより、

$$\cos \frac{2\pi}{5} \left(= \cos \frac{8\pi}{5} \right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \cos \frac{4\pi}{5} \left(= \cos \frac{6\pi}{5} \right) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4},$$

ならびに

$$\sin \frac{2\pi}{5} \left(= -\sin \frac{8\pi}{5} \right) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \quad \sin \frac{4\pi}{5} \left(= -\sin \frac{6\pi}{5} \right) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

がわかる。

一般の累乗根

定理 4.5 $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\alpha \neq 0$) の極形式表示を $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とするとき、 α の n 乗根、すなわち方程式 $z^n = \alpha$ の解の全体は

$$r^{1/n} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

により与えられる。

[証明] まず $\beta := r^{1/n} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right)$ が解 (のひとつ) であることは直ちにわかる。また

$$z^n = \alpha \iff z^n = \beta^n \iff \left(\frac{z}{\beta} \right)^n = 1$$

であるから、方程式の解 (の全体) は

$$\left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right) \beta = r^{1/n} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

となる。 □

注意 4.6 $\alpha (\neq 0)$ の n 乗根の全体は、 $n \geq 3$ の場合には、原点を中心とする正 n 角形の頂点をなす ($n = 2$ の場合には、原点に関して対称な 2 点となる)。

例 4.7 $n = 2$, $\alpha = i$ の場合には, $r = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ となるから, $z^2 = i$ の解は

$$\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad (\cos \pi + i \sin \pi) \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

となる (cf. 例 1.6).

問 4.8 $z^3 = i$ の解を求めよ.

平方根 上で述べたように, 任意の α ($\neq 0$) に対して $z^2 = \alpha$ の解は 2 つ存在し, 一方を $\sqrt{\alpha}$ で表すことにすれば, もう一方は $-\sqrt{\alpha}$ となる. これらをまとめて $\pm\sqrt{\alpha}$ と表すことが多い. $a \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$) に対しては, $\sqrt{a}$ は a の 2 つある平方根のうち正の方 ($a < 0$ のときは虚部が正である方) を意味したが, 複素数の場合は $\sqrt{\alpha}$ と $-\sqrt{\alpha}$ を差別化することはできない.

2 次方程式の解の公式の導出には, 四則演算と平方根をとる操作しか用いられていないから, 複素数を係数とする 2 次方程式に対してもそのまま適用することができる:

命題 4.9 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ ($\alpha \neq 0$) とするとき, 2 次方程式 $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ の解は

$$z = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

により与えられる.

例 4.10 α, β を単位円 $|z| = 1$ 上の相異なる 2 点とすると, $\pm\sqrt{\alpha\beta}$ は α, β を結ぶ円弧の midpoint に一致する. 実際, $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$, $\beta = \cos \varphi + i \sin \varphi$ とすると, 方程式 $z^2 = \alpha\beta$ の解は $\pm \left(\cos \frac{\theta + \varphi}{2} + i \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \right)$ により与えられる.

演習問題

4.1 方程式 $z^4 = -4$ の解を求め, 複素平面上に図示せよ.

4.2 $\alpha\beta \neq 0$ かつ $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{R}$ とするとき, $m, n \in \mathbb{R}$ ($m > 0$, $n > 0$) に対して $\gamma := \frac{n\alpha + m\beta}{m+n}$ は 0 でないことを示せ. また, 次の同値性を示せ:

$$\arg \frac{\gamma}{\alpha} = \arg \frac{\beta}{\gamma} \iff \left(\frac{\gamma}{|\gamma|} \right)^2 = \frac{\alpha}{|\alpha|} \cdot \frac{\beta}{|\beta|} \iff \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \frac{m}{n}.$$

5 Euler の公式

$z \in \mathbb{C}$ を変数とする指数関数や正弦関数, 余弦関数は, 通常 (実関数としての) Maclaurin 展開において変数を形式的に複素数として,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots, \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

と定義される. これらの級数は全ての複素数 z に対して収束することが知られている.

上で述べた e^z の定義において, z を iz で置き換えて形式的に計算すると

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + \cdots \\ &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \frac{iz^7}{7!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right), \end{aligned}$$

すなわち

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

が得られる. 上の計算では無限和において項の順序を交換しているが, この操作は正当化できることが知られている. 特に z を $\theta \in \mathbb{R}$ で置き換えると次が得られる:

定理 5.1 (Euler の公式)

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

関数 $e^{i\theta}$ を用いると, 極形式表示 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ は $re^{i\theta}$ と書くことができる. 以下では主に後者の表記法を用いる.

注意 5.2 命題 3.4 は, 関数 $e^{i\theta}$ が

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} e^{i\varphi}, \quad e^{i(\theta-\varphi)} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}}$$

をみたすことを意味している. また $|e^{i\theta}| = 1$ であるから,

$$\overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

が成り立つ.

例 5.3 点 α を中心とする半径 r の円は, パラメータ θ を用いて

$$\alpha + re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

と表すことができる.

指数関数による三角関数の表示 Euler の公式より

$$\cos \theta = \operatorname{Re} e^{i\theta}, \quad \sin \theta = \operatorname{Im} e^{i\theta}$$

となることがわかるから:

命題 5.4

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

例 5.5 $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$ または $b \neq 0$) とし, $a + ib$ の極形式表示を $re^{i\varphi}$ とする. このとき, $\theta \in \mathbb{R}$ に対し,

$$a \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} + b \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{a - ib}{2} e^{i\theta} + \frac{a + ib}{2} e^{-i\theta} = \frac{re^{-i\varphi} e^{i\theta} + re^{i\varphi} e^{-i\theta}}{2} = r \frac{e^{i(\theta-\varphi)} + e^{-i(\theta-\varphi)}}{2}$$

より

$$a \cos \theta + b \sin \theta = r \cos(\theta - \varphi).$$

問 5.6 $\theta \in \mathbb{R}$ とするとき, 次が成り立つことを示せ:

$$e^{i\theta} + 1 = 2e^{i\theta/2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad e^{i\theta} - 1 = 2ie^{i\theta/2} \sin \frac{\theta}{2}.$$

例 5.7 $\theta \in \mathbb{R}$ ($0 < \theta < 2\pi$) とするとき, $n \in \mathbb{Z}$ ($n > 0$) に対して

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i(n+1)\theta/2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{e^{i\theta/2} \sin \frac{\theta}{2}} = e^{in\theta/2} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

より

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta + i \sum_{k=1}^n \sin k\theta = \left(\cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2} \right) \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

これより

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta = \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad \sum_{k=1}^n \sin k\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

演習問題

5.1 命題 5.4 から半角の公式

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

を導け.

5.2 $r \in \mathbb{R}$ ($0 < r < 1$) とするとき, 次が成り立つことを示せ:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos k\theta = \frac{1 - r \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin k\theta = \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

6 直線の方程式

$\alpha, \mu \in \mathbb{C}$ ($\mu \neq 0$) とするとき, 命題 3.16 の (1) より, $z \in \mathbb{C}$ ($z \neq \alpha$) に対して

$$\overrightarrow{\alpha z} // \overrightarrow{\mu} \iff \bar{\mu}(z - \alpha) - \mu(\bar{z} - \bar{\alpha}) = 0$$

が成り立つ. $z = \alpha$ の場合にも最後の等式は成り立つから:

命題 6.1 点 α を通り $\overrightarrow{\mu}$ に平行な直線は

$$\bar{\mu}(z - \alpha) - \mu(\bar{z} - \bar{\alpha}) = 0$$

により与えられる.

系 6.2 $\overrightarrow{\mu}$ に平行な直線は, $c \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\bar{\mu}z - \mu\bar{z} + ic = 0$$

と表せる. 逆に, 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し, 上の方程式は $\overrightarrow{\mu}$ に平行な直線を定める.

[証明] 命題の方程式において,

$$\bar{\mu}(z - \alpha) - \mu(\bar{z} - \bar{\alpha}) = \bar{\mu}z - \mu\bar{z} - (\bar{\mu}\alpha - \mu\bar{\alpha}) = \bar{\mu}z - \mu\bar{z} - 2i \operatorname{Im}(\bar{\mu}\alpha).$$

従って $c = -2 \operatorname{Im}(\bar{\mu}\alpha)$ と置けば $c \in \mathbb{R}$ で, 方程式は

$$\bar{\mu}z - \mu\bar{z} + ic = 0$$

となる. 逆に, $c \in \mathbb{R}$ に対して $-2\bar{\mu}\alpha = ic$ により α を定めれば, $2\mu\bar{\alpha} = ic$ より $ic = -\bar{\mu}\alpha + \mu\bar{\alpha}$ が成り立つから,

$$\bar{\mu}z - \mu\bar{z} + ic = \bar{\mu}z - \mu\bar{z} + (-\bar{\mu}\alpha + \mu\bar{\alpha}) = \bar{\mu}(z - \alpha) - \mu(\bar{z} - \bar{\alpha})$$

が得られる. □

命題 6.3 $c \in \mathbb{R}$ とするとき, 2 点 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ が直線

$$\bar{\mu}z - \mu\bar{z} + ic = 0$$

に関して対称であるためには

$$\bar{\mu}\alpha - \mu\bar{\beta} + ic = 0$$

が成り立つことが必要かつ十分である.

[証明] 問題の条件は

$$\bar{\mu} \frac{\alpha + \beta}{2} - \mu \frac{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}{2} + ic = 0 \quad \text{かつ} \quad \bar{\mu}(\beta - \alpha) + \mu(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) = 0$$

と同値である (命題 3.16 の (2) を用いた). 従って

$$\left(\bar{\mu} \frac{\alpha + \beta}{2} - \mu \frac{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}{2} + ic\right) - \frac{1}{2}(\bar{\mu}(\beta - \alpha) + \mu(\bar{\beta} - \bar{\alpha})) = \bar{\mu}\alpha - \mu\bar{\beta} + ic$$

ならびに

$$\left(\bar{\mu} \frac{\alpha + \beta}{2} - \mu \frac{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}{2} + ic\right) + \frac{1}{2}(\bar{\mu}(\beta - \alpha) + \mu(\bar{\beta} - \bar{\alpha})) = -\mu\bar{\alpha} + \bar{\mu}\beta + ic = -\overline{(\bar{\mu}\alpha - \mu\bar{\beta} + ic)}$$

より主張を得る. $\square$

問 6.4 $\nu \in \mathbb{C}$ ($\nu \neq 0$) とするとき:

(1) 点 $\alpha \in \mathbb{C}$ を通り $\vec{\nu}$ に垂直な直線は

$$\bar{\nu}(z - \alpha) + \nu(\bar{z} - \bar{\alpha}) = 0$$

により与えられることを示せ.

(2) $\vec{\nu}$ に垂直な直線は, $c \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\bar{\nu}z + \nu\bar{z} + c = 0$$

と表せることを示せ. 逆に, 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し, 上の方程式は $\vec{\nu}$ に垂直な直線を定めることを示せ.

例 6.5 相異なる 2 点 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を通る直線とは, 点 α を通り $\vec{\alpha\beta} = \beta - \alpha$ に平行な直線に他ならないから,

$$(\bar{\beta} - \bar{\alpha})(z - \alpha) - (\beta - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = 0,$$

すなわち

$$(\bar{\beta} - \bar{\alpha})z - (\beta - \alpha)\bar{z} - \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 0$$

により与えられる.

注意 6.6 3 次の行列式を使えば, 上の例の方程式は

$$\begin{vmatrix} \alpha & \bar{\alpha} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

と書くことができる.

問 6.7 $\alpha \neq \beta$ かつ $|\alpha| = |\beta| = 1$ とするとき, α, β を通る直線は

$$z + \alpha\bar{\beta}\bar{z} = \alpha + \beta$$

により与えられることを示せ.

例 6.8 平行でない 2 つの直線

$$\bar{\mu}z - \mu\bar{z} + ic = 0, \quad \bar{\mu}'z - \mu'\bar{z} + ic' = 0$$

$(c, c' \in \mathbb{R})$ の交点を求めるためには, 2 つの方程式から $\bar{z}$ を消去すればよい. すなわち,

$$0 = \mu'(\bar{\mu}z - \mu\bar{z} + ic) - \mu(\bar{\mu}'z - \mu'\bar{z} + ic') = (\bar{\mu}\mu' - \mu\bar{\mu}')z + i(c\mu' - c'\mu)$$

より, 交点は

$$z = \frac{i(c\mu' - c'\mu)}{\mu\bar{\mu}' - \bar{\mu}\mu'}$$

となる (仮定より $\mu\bar{\mu}' \neq \bar{\mu}\mu'$ である). なお, z を消去すると,

$$0 = \bar{\mu}'(\bar{\mu}z - \mu\bar{z} + ic) - \bar{\mu}(\bar{\mu}'z - \mu'\bar{z} + ic') = (\bar{\mu}\mu' - \mu\bar{\mu}')\bar{z} + i(c\bar{\mu}' - c'\bar{\mu})$$

より

$$\bar{z} = \frac{-i(c\bar{\mu}' - c'\bar{\mu})}{\bar{\mu}\mu' - \mu\bar{\mu}'} = \overline{\left(\frac{i(c\mu' - c'\mu)}{\mu\bar{\mu}' - \bar{\mu}\mu'}\right)}$$

となる.

問 6.9 $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$ かつ $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = |\delta| = 1$ とするとき, 次の同値性を示せ:

$$\overrightarrow{\alpha\beta} \parallel \overrightarrow{\gamma\delta} \iff \alpha\beta = \gamma\delta.$$

また, 上の条件が成り立たないとき, α, β を通る直線と γ, δ を通る直線の交点は

$$\overline{\left(\frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta}{\alpha\beta - \gamma\delta}\right)}$$

となることを示せ.

命題 6.10 点 γ から直線

$$\bar{\mu}(z - \alpha) - \mu(\bar{z} - \bar{\alpha}) = 0$$

に下ろした垂線の足は

$$\gamma - \frac{\bar{\mu}(\gamma - \alpha) - \mu(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})}{2\bar{\mu}}.$$

また, 点と直線との距離は

$$\frac{|\bar{\mu}(\gamma - \alpha) - \mu(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})|}{2|\mu|}.$$

[証明] γ から直線に下ろした垂線の足を δ と置くと, $\overrightarrow{\mu} \perp \overrightarrow{\gamma\delta}$ より

$$\bar{\mu}(\delta - \gamma) + \mu(\bar{\delta} - \bar{\gamma}) = 0$$

が成り立つ. 従って, $\bar{\mu}(\delta - \alpha) - \mu(\bar{\delta} - \bar{\alpha}) = 0$ と併せて

$$\bar{\mu}(2\delta - \alpha - \gamma) + \mu(\bar{\alpha} - \bar{\gamma}) = 0,$$

すなわち

$$\delta = \gamma - \frac{\bar{\mu}(\gamma - \alpha) - \mu(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})}{2\bar{\mu}}$$

を得る. また, γ と直線との距離は $|\delta - \gamma|$ に一致するから, 最後の主張が得られる. $\square$

系 6.11 点 γ から α, β を通る直線に下ろした垂線の足は

$$\gamma - \frac{(\bar{\beta} - \bar{\alpha})(\gamma - \alpha) - (\beta - \alpha)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})}{2(\bar{\beta} - \bar{\alpha})} = \gamma - \frac{(\bar{\beta} - \bar{\alpha})\gamma - (\beta - \alpha)\bar{\gamma} - \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}{2(\bar{\beta} - \bar{\alpha})}.$$

また, 点と直線との距離は

$$\frac{|(\bar{\beta} - \bar{\alpha})(\gamma - \alpha) - (\beta - \alpha)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})|}{2|\beta - \alpha|} = \frac{|(\bar{\beta} - \bar{\alpha})\gamma - (\beta - \alpha)\bar{\gamma} - \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta|}{2|\beta - \alpha|}.$$

問 6.12 上の系において $|\alpha| = |\beta| = 1$ である場合には, 垂線の足は

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\bar{\gamma}}{2}$$

となることを示せ. また, 点と直線との距離は

$$\frac{|\alpha + \beta - \gamma - \alpha\beta\bar{\gamma}|}{2}$$

となることを示せ.

命題 6.13 相異なる 2 点 α, β に対し, α と β を結ぶ線分の垂直二等分線は

$$(\bar{\beta} - \bar{\alpha})z + (\beta - \alpha)\bar{z} + |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 0.$$

[証明] α と β を結ぶ線分の垂直二等分線とは, $\frac{\alpha + \beta}{2}$ を通り $\overrightarrow{\alpha\beta} = \beta - \alpha$ に垂直な直線に他ならないから, 問 6.4 の (1) より

$$(\bar{\beta} - \bar{\alpha})\left(z - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) + (\beta - \alpha)\left(\bar{z} - \frac{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}{2}\right) = 0$$

により与えられる. ここで

$$(\bar{\beta} - \bar{\alpha})\left(z - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) + (\beta - \alpha)\left(\bar{z} - \frac{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}{2}\right) = (\bar{\beta} - \bar{\alpha})z + (\beta - \alpha)\bar{z} + |\alpha|^2 - |\beta|^2$$

であるから, 求める方程式が得られる. $\square$

命題 6.14 3 点 α, β, γ が共線でないとき, $\angle\beta\alpha\gamma$ の二等分線は

$$z - \alpha - \frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha|} \cdot \frac{\gamma - \alpha}{|\gamma - \alpha|} (\bar{z} - \bar{\alpha}) = 0.$$

また, $\angle\beta\alpha\gamma$ の外角の二等分線は

$$z - \alpha + \frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha|} \cdot \frac{\gamma - \alpha}{|\gamma - \alpha|} (\bar{z} - \bar{\alpha}) = 0.$$

[証明] 命題 3.8 と問 1.18 より, $z \neq \alpha$ に対して

$$\arg \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} = \arg \frac{\gamma - \alpha}{z - \alpha} \iff \frac{\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha}}{\left| \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} \right|} = \frac{\frac{\gamma - \alpha}{z - \alpha}}{\left| \frac{\gamma - \alpha}{z - \alpha} \right|} \iff \frac{z - \alpha}{\overline{z - \alpha}} = \frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha|} \cdot \frac{\gamma - \alpha}{|\gamma - \alpha|}$$

ならびに

$$\arg \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} = \arg \frac{\alpha - \gamma}{z - \alpha} \iff \frac{\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha}}{\left| \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} \right|} = \frac{\frac{\alpha - \gamma}{z - \alpha}}{\left| \frac{\alpha - \gamma}{z - \alpha} \right|} \iff \frac{z - \alpha}{\overline{z - \alpha}} = -\frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha|} \cdot \frac{\gamma - \alpha}{|\gamma - \alpha|}$$

が成り立つことによる. □

注意 6.15 λ を $\frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha|} \cdot \frac{\gamma - \alpha}{|\gamma - \alpha|}$ の平方根 (のひとつ) とすれば, $|\lambda| = 1$ で, 内角の二等分線, 外角の二等分線はそれぞれ

$$\bar{\lambda}(z - \alpha) - \lambda(\bar{z} - \bar{\alpha}) = 0, \quad \bar{\lambda}(z - \alpha) + \lambda(\bar{z} - \bar{\alpha}) = 0$$

により与えられる. つまり, $\vec{\lambda}$ は内角の二等分線の方角ベクトルであり, 外角の二等分線の法ベクトルである.

演習問題

6.1 次の方程式が定める直線を図示せよ:

- (1) $(1 - i)z - (1 + i)\bar{z} - 2i = 0.$
- (2) $(\omega^2 - 1)z + (\omega - 1)\bar{z} - 3 = 0.$
- (3) $z - \omega^2\bar{z} = 0.$
- (4) $z + i\bar{z} = 2 + 2i.$

6.2 $\nu \in \mathbb{C}$ ($\nu \neq 0$), $c \in \mathbb{R}$ とするとき, 点 γ から直線

$$\bar{\nu}z + \nu\bar{z} + c = 0$$

に下ろした垂線の足を求めよ. また, 点と直線との距離を求めよ.

7 円の方程式

$\alpha \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$ ($r > 0$) とするとき, 点 α を中心とする半径 r の円は

$$|z - \alpha| = r$$

により与えられる. ここで

$$|z - \alpha|^2 = |z|^2 - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + |\alpha|^2$$

であるから:

命題 7.1 点 α を中心とする半径 r の円は

$$|z|^2 - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + |\alpha|^2 - r^2 = 0$$

により与えられる.

系 7.2 点 α を中心とする円は, $c < |\alpha|^2$ をみたす $c \in \mathbb{R}$ を用いて

$$|z|^2 - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + c = 0$$

と表せる. 逆に, $c < |\alpha|^2$ をみたす $c \in \mathbb{R}$ に対し, 上の方程式は α を中心とする円を定める.

例 7.3 $\alpha \neq \beta$ とするとき, 点 α を中心とし点 β を通る円は

$$|z - \alpha|^2 = |\beta - \alpha|^2,$$

すなわち

$$(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) - (\beta - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) = 0$$

により与えられる. また, 点 β における円の接線は, $\overrightarrow{\alpha\beta} = \beta - \alpha$ に垂直であるから,

$$(\bar{\beta} - \bar{\alpha})(z - \beta) + (\beta - \alpha)(\bar{z} - \bar{\beta}) = 0$$

により与えられる.

問 7.4 $|\alpha| = 1$ とするとき, 単位円 $|z| = 1$ の点 α における接線は

$$z + \alpha^2 \bar{z} = 2\alpha$$

により与えられることを示せ (cf. 問 6.7).

問 7.5 $|\alpha| > 1$ とするとき, 点 α から単位円 $|z| = 1$ に引いた接線の接点は

$$\frac{1 \pm i\sqrt{|\alpha|^2 - 1}}{\bar{\alpha}}$$

となることを示せ.

命題 7.6 (Apollonius の円) $\alpha \neq \beta$ とし, $c \in \mathbb{R}$ ($c > 0$, $c \neq 1$) とする. このとき, 条件

$$\frac{|z - \beta|}{|z - \alpha|} = c$$

をみたす z ($\neq \alpha, \beta$) の全体は, $\frac{\beta - c^2 \alpha}{1 - c^2}$ を中心とする半径 $\left| \frac{c(\beta - \alpha)}{1 - c^2} \right|$ の円

$$|z|^2 - \frac{\bar{\beta} - c^2 \bar{\alpha}}{1 - c^2} z - \frac{\beta - c^2 \alpha}{1 - c^2} \bar{z} + \frac{|\beta|^2 - c^2 |\alpha|^2}{1 - c^2} = 0$$

に一致する. この円を **Apollonius の円**という.

[証明] $z \neq \alpha, \beta$ に対して

$$\frac{|z - \beta|}{|z - \alpha|} = c \iff |z - \beta|^2 - c^2 |z - \alpha|^2 = 0.$$

ここで

$$|z - \beta|^2 - c^2 |z - \alpha|^2 = (1 - c^2) |z|^2 - (\bar{\beta} - c^2 \bar{\alpha}) z - (\beta - c^2 \alpha) \bar{z} + |\beta|^2 - c^2 |\alpha|^2.$$

従って, 上で述べた条件は

$$|z|^2 - \frac{\bar{\beta} - c^2 \bar{\alpha}}{1 - c^2} z - \frac{\beta - c^2 \alpha}{1 - c^2} \bar{z} + \frac{|\beta|^2 - c^2 |\alpha|^2}{1 - c^2} = 0$$

と同値である. さて, 明らかに

$$\overline{\left(\frac{\beta - c^2 \alpha}{1 - c^2} \right)} = \frac{\bar{\beta} - c^2 \bar{\alpha}}{1 - c^2}.$$

また

$$\frac{|\beta|^2 - c^2 |\alpha|^2}{1 - c^2}$$

は実数で,

$$\left| \frac{\beta - c^2 \alpha}{1 - c^2} \right|^2 - \frac{|\beta|^2 - c^2 |\alpha|^2}{1 - c^2} = \frac{|\beta - c^2 \alpha|^2 - (1 - c^2)(|\beta|^2 - c^2 |\alpha|^2)}{(1 - c^2)^2} = \left| \frac{c(\beta - \alpha)}{1 - c^2} \right|^2$$

は正の実数である. □

命題 7.7 $\alpha \neq \beta$ とし, $|\mu| = 1$ (ただし $\mu \neq \pm 1$) とする. このとき, 条件

$$\arg \frac{\beta - z}{\alpha - z} = \arg(\pm \mu)$$

をみたす z ($\neq \alpha, \beta$) の全体は, $\frac{\beta - \mu^2 \alpha}{1 - \mu^2}$ を中心とする半径 $\left| \frac{\beta - \alpha}{1 - \mu^2} \right|$ の円

$$|z|^2 - \frac{\bar{\alpha} - \mu^2 \bar{\beta}}{1 - \mu^2} z - \frac{\beta - \mu^2 \alpha}{1 - \mu^2} \bar{z} + \frac{\bar{\alpha} \beta - \mu^2 \alpha \bar{\beta}}{1 - \mu^2} = 0$$

(から α, β を除いたもの) に一致する.

[証明] $z \neq \alpha, \beta$ に対して

$$\arg \frac{\beta - z}{\alpha - z} = \arg(\pm\mu) \iff \frac{\frac{\beta - z}{\alpha - z}}{\left| \frac{\beta - z}{\alpha - z} \right|} = \pm\mu \iff \frac{\beta - z}{\bar{\beta} - \bar{z}} \cdot \frac{\bar{\alpha} - \bar{z}}{\alpha - z} = \mu^2.$$

ここで

$$(\beta - z)(\bar{\alpha} - \bar{z}) - \mu^2(\bar{\beta} - \bar{z})(\alpha - z) = (1 - \mu^2)|z|^2 - (\bar{\alpha} - \mu^2\bar{\beta})z - (\beta - \mu^2\alpha)\bar{z} + \bar{\alpha}\beta - \mu^2\alpha\bar{\beta}.$$

従って, 上で述べた条件は

$$|z|^2 - \frac{\bar{\alpha} - \mu^2\bar{\beta}}{1 - \mu^2}z - \frac{\beta - \mu^2\alpha}{1 - \mu^2}\bar{z} + \frac{\bar{\alpha}\beta - \mu^2\alpha\bar{\beta}}{1 - \mu^2} = 0$$

と同値である. さて, $\bar{\mu} = \mu^{-1}$ より,

$$\overline{\left(\frac{\beta - \mu^2\alpha}{1 - \mu^2} \right)} = \frac{\bar{\beta} - \mu^{-2}\bar{\alpha}}{1 - \mu^{-2}} = \frac{\mu^2\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\mu^2 - 1} = \frac{\bar{\alpha} - \mu^2\bar{\beta}}{1 - \mu^2}.$$

また

$$\overline{\left(\frac{\bar{\alpha}\beta - \mu^2\alpha\bar{\beta}}{1 - \mu^2} \right)} = \frac{\alpha\bar{\beta} - \mu^{-2}\bar{\alpha}\beta}{1 - \mu^{-2}} = \frac{\mu^2\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta}{\mu^2 - 1} = \frac{\bar{\alpha}\beta - \mu^2\alpha\bar{\beta}}{1 - \mu^2}$$

は実数で,

$$\left| \frac{\beta - \mu^2\alpha}{1 - \mu^2} \right|^2 - \frac{\bar{\alpha}\beta - \mu^2\alpha\bar{\beta}}{1 - \mu^2} = \frac{|\beta - \mu^2\alpha|^2 - (1 - \mu^2)(\bar{\alpha}\beta - \mu^2\alpha\bar{\beta})}{|1 - \mu^2|^2} = \left| \frac{\beta - \alpha}{1 - \mu^2} \right|^2$$

は正の実数である. □

注意 7.8 $\rho = \frac{\beta - \mu^2\alpha}{1 - \mu^2}$ と置くと,

$$\frac{\beta - \rho}{\alpha - \rho} = \frac{(1 - \mu^2)\beta - \beta + \mu^2\alpha}{(1 - \mu^2)\alpha - \beta + \mu^2\alpha} = \mu^2$$

となるから,

$$\arg \frac{\beta - \rho}{\alpha - \rho} = 2 \arg \mu.$$

従って, 命題 7.7 の条件は

$$\arg \frac{\beta - z}{\alpha - z} = \frac{1}{2} \arg \frac{\beta - \rho}{\alpha - \rho} \quad \text{または} \quad \arg \frac{\beta - z}{\alpha - z} = \frac{1}{2} \arg \frac{\beta - \rho}{\alpha - \rho} + \pi$$

と書くこともできる.

問 7.9 命題 7.7 において, α, β は共に円の上にあることを確認せよ. また, 命題の図形的な意味を考えよ.

定理 7.10 3 点 α, β, γ が共線でないとき, 点 $\delta (\neq \alpha, \beta)$ が α, β, γ を通る円の上にあるためには

$$\frac{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)}{(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)}$$

が (0 でない) 実数であることが必要かつ十分である.

[証明] 3 点 α, β, γ を通る円を求めるためには, 命題 7.7 において

$$\mu = \frac{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}{\left|\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right|} = \frac{\beta-\gamma}{|\beta-\gamma|} \cdot \frac{|\alpha-\gamma|}{\alpha-\gamma}$$

とすればよい.

$$\mu^2 = \frac{\beta-\gamma}{\overline{\beta-\gamma}} \cdot \frac{\overline{\alpha-\gamma}}{\alpha-\gamma}$$

であるから, 求める円 (から α, β を除いたもの) は

$$\frac{\beta-z}{\overline{\beta-z}} \cdot \frac{\overline{\alpha-z}}{\alpha-z} = \frac{\beta-\gamma}{\overline{\beta-\gamma}} \cdot \frac{\overline{\alpha-\gamma}}{\alpha-\gamma}$$

により与えられる. この等式は

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} \cdot \frac{\beta-z}{\alpha-z} = \overline{\left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} \cdot \frac{\beta-z}{\alpha-z} \right)}$$

と同値であるから, 主張を得る. □

注意 7.11 命題 7.7 と定理 7.10 の証明からわかるように, α, β, γ を通る円を α, β によって 2 つの円弧に分けると, 円の上にある点 δ ($\neq \alpha, \beta$) について次が成り立つ:

$$\delta \text{ は } \gamma \text{ と同じ円弧の上にある} \iff \arg \frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta} = \arg \frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma} \iff \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)} > 0,$$

$$\delta \text{ は } \gamma \text{ と別な円弧の上にある} \iff \arg \frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta} = \arg \left(-\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma} \right) \iff \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)} < 0.$$

演習問題

7.1 $\mu = \pm 1$ の場合に, 命題 7.7 と同様の考察をせよ.

7.2 円の上に相異なる 4 点が $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の順に並んでいるとき,

$$|\alpha-\gamma||\beta-\delta| = |\alpha-\beta||\gamma-\delta| + |\alpha-\delta||\beta-\gamma|$$

が成り立つことを示せ.

8 相似変換と合同変換

$\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$ に対し, 複素平面の変換 ($\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への写像) $T_{\kappa, \lambda}$ と $T_{\kappa, \lambda}^*$ を

$$T_{\kappa, \lambda}(z) = \kappa z + \lambda, \quad T_{\kappa, \lambda}^*(z) = \kappa \bar{z} + \lambda$$

により定める.

例 8.1 (1) $T_{1, \lambda}$ は $\vec{\lambda}$ だけの平行移動を表す. 特に $T_{1, 0}$ は恒等写像を表す.

(2) $|\kappa| = 1$ のとき, $T_{\kappa, 0}$ は原点を中心とする回転を表す.

(3) κ が 0 でない実数のとき, $T_{\kappa, 0}$ は原点を中心とする拡大または縮小を表す.

(4) $T_{1, 0}^*$ は実軸に関する折り返しを表し, $T_{-1, 0}^*$ は虚軸に関する折り返しを表す.

問 8.2 $T_{i, 0}^*$ と $T_{-i, 0}^*$ の図形的な意味を説明せよ.

命題 8.3

$$\begin{aligned} T_{\kappa, \lambda} \circ T_{\mu, \nu} &= T_{\kappa\mu, \kappa\nu + \lambda}, & T_{\kappa, \lambda} \circ T_{\mu, \nu}^* &= T_{\kappa\mu, \kappa\nu + \lambda}^*, \\ T_{\kappa, \lambda}^* \circ T_{\mu, \nu} &= T_{\kappa\bar{\mu}, \kappa\bar{\nu} + \lambda}^*, & T_{\kappa, \lambda}^* \circ T_{\mu, \nu}^* &= T_{\kappa\bar{\mu}, \kappa\bar{\nu} + \lambda}. \end{aligned}$$

[証明] まず

$$(T_{\kappa, \lambda} \circ T_{\mu, \nu})(z) = T_{\kappa, \lambda}(T_{\mu, \nu}(z)) = T_{\kappa, \lambda}(\mu z + \nu) = \kappa(\mu z + \nu) + \lambda = \kappa\mu z + \kappa\nu + \lambda = T_{\kappa\mu, \kappa\nu + \lambda}(z)$$

より $T_{\kappa, \lambda} \circ T_{\mu, \nu} = T_{\kappa\mu, \kappa\nu + \lambda}$ がわかる. また

$$(T_{\kappa, \lambda} \circ T_{\mu, \nu}^*)(z) = T_{\kappa, \lambda}(T_{\mu, \nu}^*(z)) = T_{\kappa, \lambda}(\mu \bar{z} + \nu) = \kappa(\mu \bar{z} + \nu) + \lambda = \kappa\mu \bar{z} + \kappa\nu + \lambda$$

より $T_{\kappa, \lambda} \circ T_{\mu, \nu}^* = T_{\kappa\mu, \kappa\nu + \lambda}^*$ がわかる. 残りについても同様. □

系 8.4 $\kappa \neq 0$ であるとき

$$(T_{\kappa, \lambda})^{-1} = T_{1/\kappa, -\lambda/\kappa}, \quad (T_{\kappa, \lambda}^*)^{-1} = T_{1/\kappa, -\lambda/\kappa}^*.$$

[証明] 命題より

$$T_{\kappa, \lambda} \circ T_{1/\kappa, -\lambda/\kappa} = T_{\kappa/\kappa, -\kappa\lambda/\kappa + \lambda} = T_{1, 0}, \quad T_{1/\kappa, -\lambda/\kappa} \circ T_{\kappa, \lambda} = T_{\kappa/\kappa, \lambda/\kappa - \lambda/\kappa} = T_{1, 0}$$

がわかるから, $T_{\kappa, \lambda}$ と $T_{1/\kappa, -\lambda/\kappa}$ は互いに逆写像である. $T_{\kappa, \lambda}^*$ と $T_{1/\kappa, -\lambda/\kappa}^*$ についても同様. □

$\kappa \neq 0$ であるとき $T_{\kappa, \lambda}$ を正の相似変換, $T_{\kappa, \lambda}^*$ を負の相似変換といい, $|\kappa|$ を相似比という. また, 相似比が 1 であるような正の (負の) 相似変換を正の (負の) 合同変換という. さらに, 正の相似変換と負の相似変換をまとめて相似変換といい, 正の合同変換と負の合同変換をまとめて合同変換という.

例 8.5 命題 6.3 より, 直線

$$\bar{\mu}z - \mu\bar{z} + ic = 0$$

($\mu \neq 0, c \in \mathbb{R}$) に関する折り返しは

$$z \mapsto \frac{\mu}{\bar{\mu}}\bar{z} - \frac{ic}{\bar{\mu}}$$

で与えられることがわかる。 $\left|\frac{\mu}{\bar{\mu}}\right| = 1$ であるから, これは負の合同変換である。

注意 8.6 命題 8.3 より, 相似変換と相似変換の合成は相似変換になることがわかる。このことを“相似変換は合成に関して閉じている”という。命題からわかるように, 正の相似変換も合成に関して閉じているが, 負の相似変換は合成に関して閉じていない。

問 8.7 (1) 合同変換は合成に関して閉じていることを示せ。

(2) 正の合同変換は合成に関して閉じていることを示せ。

相似変換の性質

命題 8.8 (1) 正の相似変換 $T_{\kappa,\lambda}$ に対し,

$$T_{\kappa,\lambda}(z) - T_{\kappa,\lambda}(w) = \kappa(z - w), \quad \frac{T_{\kappa,\lambda}(z) - T_{\kappa,\lambda}(w)}{T_{\kappa,\lambda}(z') - T_{\kappa,\lambda}(w')} = \frac{z - w}{z' - w'}.$$

(2) 負の相似変換 $T_{\kappa,\lambda}^*$ に対し,

$$T_{\kappa,\lambda}^*(z) - T_{\kappa,\lambda}^*(w) = \kappa \overline{(z - w)}, \quad \frac{T_{\kappa,\lambda}^*(z) - T_{\kappa,\lambda}^*(w)}{T_{\kappa,\lambda}^*(z') - T_{\kappa,\lambda}^*(w')} = \overline{\left(\frac{z - w}{z' - w'}\right)}.$$

[証明] いずれも容易。

□

系 8.9 相似変換によって, 2 点間の距離は定数倍だけ変化する。すなわち, 相似変換 f の相似比を k とするとき:

$$|f(z) - f(w)| = k|z - w|.$$

系 8.10 相似変換は距離の比を保存する。すなわち, f を相似変換とするとき:

$$\frac{|f(z) - f(w)|}{|f(z') - f(w')|} = \frac{|z - w|}{|z' - w'|}.$$

系 8.11 相似変換は角度を保存する。すなわち, f を正の (負の) 相似変換とするとき:

$$\arg \frac{f(w') - f(z)}{f(w) - f(z)} = \arg \frac{w' - z}{w - z} \quad \left(\arg \frac{f(w') - f(z)}{f(w) - f(z)} = -\arg \frac{w' - z}{w - z} \right).$$

問 8.12 (1) 相似変換による線分の像は線分であることを示せ。

(2) 相似変換による三角形の像は三角形であることを示せ。

(3) 相似変換による円の像は円であることを示せ。

合同変換の特徴付け 系 8.9 より, 合同変換は 2 点間の距離を保存することがわかる. 逆に, この性質をもつ変換は合同変換に限る:

定理 8.13 複素平面の変換 f で条件

$$|f(z) - f(w)| = |z - w|$$

をみたすものは合同変換である.

この定理を証明する前に, 次の補題を示しておく:

補題 8.14 複素平面の変換 g が条件

$$|g(z) - g(w)| = |z - w|$$

ならびに $g(0) = 0$ をみたすとき:

- (1) $|g(z)| = |z|$.
- (2) $\operatorname{Re}(g(z)\overline{g(w)}) = \operatorname{Re}(z\overline{w})$.
- (3) $|\kappa| = 1$ をみたす κ が存在して $g(z) = \kappa z$ または $g(z) = \kappa \bar{z}$ が成り立つ.

[証明] (1) 仮定の条件において $w = 0$ とすればよい.

(2)

$$|g(z) - g(w)|^2 = |g(z)|^2 - 2\operatorname{Re}(g(z)\overline{g(w)}) + |g(w)|^2, \quad |z - w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$$

が一致すること, ならびに (1) より $|g(z)| = |z|$, $|g(w)| = |w|$ となることによる.

- (3) $\kappa = g(1)$ と置くと, (1) より $|\kappa| = |g(1)| = |1| = 1$. また, (2) において $w = 1$ として

$$\operatorname{Re}(\bar{\kappa}g(z)) = \operatorname{Re} z$$

を得る. この式で $z = i$ とすることにより $\operatorname{Re}(\bar{\kappa}g(i)) = \operatorname{Re} i = 0$ がわかる. また $|\bar{\kappa}g(i)| = |\bar{\kappa}||g(i)| = |\kappa||i| = 1$. つまり $\bar{\kappa}g(i)$ は絶対値が 1 の純虚数となり, i または $-i$ に一致する.

$\bar{\kappa}g(i) = i$, すなわち $g(i) = i\kappa$ の場合, (2) において $w = i$ として

$$\operatorname{Im}(\bar{\kappa}g(z)) = \operatorname{Im} z$$

を得る. よって $\bar{\kappa}g(z) = z$, すなわち $g(z) = \kappa z$ が成り立つ.

$\bar{\kappa}g(i) = -i$, すなわち $g(i) = -i\kappa$ の場合には, (2) において $w = i$ とすると

$$\operatorname{Im}(\bar{\kappa}g(z)) = -\operatorname{Im} z$$

が得られる. よって, この場合には $\bar{\kappa}g(z) = \bar{z}$, すなわち $g(z) = \kappa \bar{z}$ が成り立つ. □

[定理 8.13 の証明] f を定理の条件をみたす変換とし, 変換 g を

$$g(z) = f(z) - f(0)$$

により定める. このとき

$$g(z) - g(w) = (f(z) - f(0)) - (f(w) - f(0)) = f(z) - f(w)$$

より

$$|g(z) - g(w)| = |f(z) - f(w)| = |z - w|.$$

また, 明らかに $g(0) = 0$. 従って, 補題より, $|\kappa| = 1$ をみたす κ が存在して $g(z) = \kappa z$ または $g(z) = \kappa \bar{z}$ が成り立つ. $f(z) = g(z) + f(0)$ であるから, $\lambda = f(0)$ と置けば, 前者の場合には $f = T_{\kappa, \lambda}$ となり, 後者の場合には $f = T_{\kappa, \lambda}^*$ となる. $\square$

相似変換の特徴付け 定理 8.13 より, 系 8.9 と系 8.10 の逆も成り立つことがわかる (証明は演習問題):

命題 8.15 (1) 複素平面の変換 f が $k \in \mathbb{R}$ ($k > 0$) に対して条件

$$|f(z) - f(w)| = k|z - w|$$

をみたすならば, f は相似変換である.

(2) 複素平面の変換 f が条件

$$\frac{|f(z) - f(w)|}{|f(z') - f(w')|} = \frac{|z - w|}{|z' - w'|}$$

をみたすならば, f は相似変換である.

また, 系 8.11 の逆も成り立つことが示せる (証明は略):

命題 8.16 複素平面の変換 f が条件

$$\arg \frac{f(w') - f(z)}{f(w) - f(z)} = \arg \frac{w' - z}{w - z} \quad \left(\arg \frac{f(w') - f(z)}{f(w) - f(z)} = -\arg \frac{w' - z}{w - z} \right)$$

をみたすならば, f は正の (負の) 相似変換である.

演習問題

8.1 (1) $|\kappa| = 1$ かつ $\kappa \neq 1$ とするとき, $T_{\kappa, \lambda}$ は点 $\frac{\lambda}{1 - \kappa}$ を中心とする回転を表すことを示せ.

(2) 平行でない 2 つの直線に関する折り返しを合成したものは, 2 直線の交点を中心とする回転であることを示せ.

8.2 定理 8.13 から命題 8.15 を導け.

9 三角形の相似条件と合同条件

2つの三角形 $\triangle\alpha\beta\gamma$ と $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ について, 条件 $f(\alpha) = \alpha'$, $f(\beta) = \beta'$, $f(\gamma) = \gamma'$ をみたす正の (負の) 相似変換 f が存在するとき, これらの三角形は正に (負に) 相似であるという.

命題 9.1 $\triangle\alpha\beta\gamma$ と $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ に対して:

$$\triangle\alpha\beta\gamma \text{ と } \triangle\alpha'\beta'\gamma' \text{ は正に相似} \iff \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'} \iff \alpha\beta' + \beta\gamma' + \gamma\alpha' - \alpha'\beta - \beta'\gamma - \gamma'\alpha = 0.$$

[証明] $\triangle\alpha\beta\gamma$ と $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ が正に相似であれば $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'}$ となることは命題 8.8 の (1) による. 逆に $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'}$ とするとき,

$$\frac{\beta' - \alpha'}{\beta - \alpha} = \frac{\gamma' - \alpha'}{\gamma - \alpha}$$

を κ と置けば

$$\beta' - \alpha' = \kappa(\beta - \alpha), \quad \gamma' - \alpha' = \kappa(\gamma - \alpha).$$

従って

$$\alpha' - \kappa\alpha = \beta' - \kappa\beta = \gamma' - \kappa\gamma$$

を λ と置けば

$$\kappa\alpha + \lambda = \alpha', \quad \kappa\beta + \lambda = \beta', \quad \kappa\gamma + \lambda = \gamma'$$

が成り立つ. さらに

$$(\beta - \alpha)(\gamma' - \alpha') - (\beta' - \alpha')(\gamma - \alpha) = \alpha\beta' + \beta\gamma' + \gamma\alpha' - \alpha'\beta - \beta'\gamma - \gamma'\alpha.$$

以上により求める同値性を得る. □

注意 9.2 上の命題の最後の条件は, 3 次の行列式を使えば

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & 1 \\ \beta & \beta' & 1 \\ \gamma & \gamma' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

と書くことができる.

問 9.3 $\triangle\alpha\beta\gamma$ に対して

$$\alpha' = \frac{\beta + \gamma}{2}, \quad \beta' = \frac{\gamma + \alpha}{2}, \quad \gamma' = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

と置くと, $\triangle\alpha\beta\gamma$ と $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ は正に相似であることを示せ. また, (正の) 相似変換 f で

$$f(\alpha) = \alpha', \quad f(\beta) = \beta', \quad f(\gamma) = \gamma'$$

をみたすものを構成せよ.

問 9.4 $\triangle\alpha\beta\gamma$ と $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ に対して次の同値性を示せ:

$$\triangle\alpha\beta\gamma \text{ と } \triangle\alpha'\beta'\gamma' \text{ は負に相似} \iff \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \overline{\left(\frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'}\right)}.$$

定理 9.5

$$\frac{|\beta - \alpha|}{|\beta' - \alpha'|} = \frac{|\gamma - \alpha|}{|\gamma' - \alpha'|}, \quad \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \arg \frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'}$$

であれば, $\triangle\alpha\beta\gamma$ と $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ は正に相似.

[証明] 仮定より直ちに $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'}$ となることがわかるから, 命題 9.1 より主張を得る. $\square$

問 9.6

$$\frac{|\beta - \alpha|}{|\beta' - \alpha'|} = \frac{|\gamma - \alpha|}{|\gamma' - \alpha'|}, \quad \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = -\arg \frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'}$$

であれば, $\triangle\alpha\beta\gamma$ と $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ は負に相似であることを示せ.

定理 9.7

$$\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \arg \frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'}, \quad \arg \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} = \arg \frac{\gamma' - \beta'}{\alpha' - \beta'}$$

であれば, $\triangle\alpha\beta\gamma$ と $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ は正に相似.

補題 9.8 $\delta, \delta' \in \mathbb{C}$ ($\delta, \delta' \notin \mathbb{R}$) について, $\delta \bar{\delta'} \in \mathbb{R}$ かつ $(1 - \delta)(1 - \bar{\delta'}) \in \mathbb{R}$ であれば $\delta = \delta'$.

[証明] まず

$$0 = \operatorname{Im}(\delta \bar{\delta'}) = \operatorname{Re} \delta \operatorname{Im} \bar{\delta'} + \operatorname{Im} \delta \operatorname{Re} \bar{\delta'} = -\operatorname{Re} \delta \operatorname{Im} \delta' + \operatorname{Im} \delta \operatorname{Re} \delta'$$

より $\operatorname{Re} \delta \operatorname{Im} \delta' = \operatorname{Im} \delta \operatorname{Re} \delta'$. 次に, $(1 - \delta)(1 - \bar{\delta'}) = 1 - (\delta + \bar{\delta'}) + \delta \bar{\delta'}$ より $\delta + \bar{\delta'} \in \mathbb{R}$ がわかるから, $\operatorname{Im} \delta = \operatorname{Im} \delta' \neq 0$. 従って $\operatorname{Re} \delta = \operatorname{Re} \delta'$ となり, $\delta = \delta'$ を得る. $\square$

[定理 9.7 の証明]

$$\delta = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}, \quad \delta' = \frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'}$$

と置くと,

$$\arg(\delta \bar{\delta'}) = \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} - \arg \frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'} = 0$$

であるから, $\delta \bar{\delta'} \in \mathbb{R}$ である. また

$$1 - \delta = \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}, \quad 1 - \delta' = \frac{\gamma' - \beta'}{\alpha' - \beta'}$$

より

$$\arg((1 - \delta)(1 - \bar{\delta'})) = \arg((1 - \delta) \overline{(1 - \delta')}) = \arg \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} - \arg \frac{\gamma' - \beta'}{\alpha' - \beta'} = 0$$

であるから, $(1 - \delta)(1 - \bar{\delta'}) \in \mathbb{R}$ である. 従って, 補題より $\delta = \delta'$ となり, 命題 9.1 より主張を得る. $\square$

問 9.9

$$\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = -\arg \frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'}, \quad \arg \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} = -\arg \frac{\gamma' - \beta'}{\alpha' - \beta'}$$

であれば, $\triangle\alpha\beta\gamma$ と $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ は負に相似であることを示せ.

定理 9.10

$$\frac{|\beta - \alpha|}{|\beta' - \alpha'|} = \frac{|\gamma - \beta|}{|\gamma' - \beta'|} = \frac{|\alpha - \gamma|}{|\alpha' - \gamma'|}$$

であれば, $\triangle\alpha\beta\gamma$ と $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ は正または負に相似.

補題 9.11 $\delta, \delta' \in \mathbb{C}$ について, $|\delta| = |\delta'|$ かつ $|1 - \delta| = |1 - \delta'|$ であれば, $\delta = \delta'$ または $\delta = \bar{\delta}'$.

[証明] $|1 - \delta|^2 = 1 - (\delta + \bar{\delta}) + |\delta|^2$ と $|1 - \delta'|^2 = 1 - (\delta' + \bar{\delta}') + |\delta'|^2$ より $\delta + \bar{\delta} = \delta' + \bar{\delta}'$ がわかるから,

$$(\delta - \delta')(\delta - \bar{\delta}') = \delta^2 - (\delta' + \bar{\delta}')\delta + |\delta|^2 = \delta^2 - (\delta + \bar{\delta})\delta + |\delta|^2 = 0.$$

これより主張を得る. □

[定理 9.10 の証明]

$$\delta = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}, \quad \delta' = \frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'}$$

と置くと, $|\delta| = |\delta'|$. また

$$1 - \delta = \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}, \quad 1 - \delta' = \frac{\gamma' - \beta'}{\alpha' - \beta'}$$

より $|1 - \delta| = |1 - \delta'|$. 従って, 補題より $\delta = \delta'$ または $\delta = \bar{\delta}'$ となり, 命題 9.1 と問 9.4 より主張を得る. □

以上をまとめると, よく知られた三角形の相似条件が得られる:

系 9.12 2 つの三角形で次の条件のいずれかをみたすものは互いに (正または負に) 相似である:

- (1) (二辺比夾角相等条件) 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい.
- (2) (二角相等条件) 2 組の角がそれぞれ等しい.
- (3) (三辺比相等条件) 3 組の辺の比が全て等しい.

合同条件 2 つの三角形 $\triangle\alpha\beta\gamma$ と $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ について, 条件 $f(\alpha) = \alpha'$, $f(\beta) = \beta'$, $f(\gamma) = \gamma'$ をみたす正の (負の) 合同変換 f が存在するとき, これらの三角形は正に (負に) 合同であるという.

合同変換とは, 相似比 1 の相似変換, すなわち線分の長さを保存する相似変換であるから, 上で述べた相似条件に “対応する 1 組の辺の長さが等しい” という条件を加えれば三角形の合同条件が直ちに得られる:

系 9.13 2 つの三角形で次の条件のいずれかをみたすものは互いに (正または負に) 合同である:

- (1) (二辺夾角相等条件) 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい.
- (2) (二角夾辺相等条件) 2 組の角とその間の辺がそれぞれ等しい.
- (3) (三辺相等条件) 3 組の辺が全て等しい.

演習問題

9.1 $\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0$ をみたす相異なる 3 点 α, β, γ に対し, 相似変換 f で条件

$$f(1) = \alpha, \quad f(\omega) = \beta, \quad f(\omega^2) = \gamma$$

をみたすものを構成せよ. また, 相似変換 g で条件

$$g(1) = \alpha, \quad g(\omega^2) = \beta, \quad g(\omega) = \gamma$$

をみたすものを構成せよ.

9.2 相似比 k の相似変換 f と 3 点 α, β, γ に対して $\alpha' = f(\alpha)$, $\beta' = f(\beta)$, $\gamma' = f(\gamma)$ と置くとき,

$$|\operatorname{Im}(\alpha' \overline{\beta'} + \beta' \overline{\gamma'} + \gamma' \overline{\alpha'})| = k^2 |\operatorname{Im}(\alpha \overline{\beta} + \beta \overline{\gamma} + \gamma \overline{\alpha})|$$

が成り立つことを示せ. また, この等式の図形的な意味を考えよ.

10 三角形の五心

本節全体を通し, 3 点 α, β, γ は共線でないとする. また

$$\alpha \bar{\beta} + \beta \bar{\gamma} + \gamma \bar{\alpha} - \bar{\alpha} \beta - \bar{\beta} \gamma - \bar{\gamma} \alpha = 2i \operatorname{Im}(\alpha \bar{\beta} + \beta \bar{\gamma} + \gamma \bar{\alpha})$$

を $D(\alpha, \beta, \gamma)$ で表す.

命題 10.1 (三角形の重心) $\triangle \alpha\beta\gamma$ の 3 本の中線は 1 点

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

で交わる. この点を $\triangle \alpha\beta\gamma$ の重心という.

[証明] 点 α と β, γ の中点 $\frac{\beta + \gamma}{2}$ を結ぶ線分を $2:1$ に内分する点は

$$\frac{\alpha + 2 \frac{\beta + \gamma}{2}}{2 + 1} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

となる. この点は α, β, γ に関して対称であるから, β と $\frac{\gamma + \alpha}{2}$ を結ぶ線分を $2:1$ に内分する点や γ と $\frac{\alpha + \beta}{2}$ を結ぶ線分を $2:1$ に内分する点を計算しても同じ点が得られる. これより主張を得る. $\square$

定理 10.2 (三角形の外心) $\triangle \alpha\beta\gamma$ の 3 つの辺の垂直二等分線は 1 点

$$\frac{\alpha |\beta|^2 + \beta |\gamma|^2 + \gamma |\alpha|^2 - |\alpha|^2 \beta - |\beta|^2 \gamma - |\gamma|^2 \alpha}{D(\alpha, \beta, \gamma)}$$

で交わる. この点を $\triangle \alpha\beta\gamma$ の外心という.

[証明] α と β を結ぶ辺の垂直二等分線と β と γ を結ぶ辺の垂直二等分線の交点を ρ と置くと, 命題 6.13 より

$$(\bar{\beta} - \bar{\alpha})\rho + (\beta - \alpha)\bar{\rho} + |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 0, \quad (\bar{\gamma} - \bar{\beta})\rho + (\gamma - \beta)\bar{\rho} + |\beta|^2 - |\gamma|^2 = 0.$$

これより

$$\rho = \frac{(|\alpha|^2 - |\beta|^2)(\gamma - \beta) - (|\beta|^2 - |\gamma|^2)(\beta - \alpha)}{(\beta - \alpha)(\bar{\gamma} - \bar{\beta}) - (\bar{\beta} - \bar{\alpha})(\gamma - \beta)} = \frac{\alpha |\beta|^2 + \beta |\gamma|^2 + \gamma |\alpha|^2 - |\alpha|^2 \beta - |\beta|^2 \gamma - |\gamma|^2 \alpha}{D(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

容易にわかるように, この点は α, β, γ に関して対称である. よって主張を得る. $\square$

線分の垂直二等分線とは線分の両端から等距離にある点の軌跡であるから, 三角形の各頂点は外心から等距離の位置にある. 外心を中心として 3 頂点を通る円を三角形の外接円という.

定理 10.3 (三角形の垂心) $\triangle \alpha\beta\gamma$ の各頂点から対辺に下ろした垂線は 1 点

$$\frac{\alpha^2 \bar{\beta} + \beta^2 \bar{\gamma} + \gamma^2 \bar{\alpha} - \bar{\alpha} \beta^2 - \bar{\beta} \gamma^2 - \bar{\gamma} \alpha^2 - \alpha |\beta|^2 - \beta |\gamma|^2 - \gamma |\alpha|^2 + |\alpha|^2 \beta + |\beta|^2 \gamma + |\gamma|^2 \alpha}{D(\alpha, \beta, \gamma)}$$

で交わる. この点を $\triangle \alpha\beta\gamma$ の垂心という.

[証明] γ から対辺に下ろした垂線と α から対辺に下ろした垂線の交点を σ と置くと, 問 6.4 の (1) より

$$(\bar{\beta} - \bar{\alpha})(\sigma - \gamma) + (\beta - \alpha)(\bar{\sigma} - \bar{\gamma}) = 0, \quad (\bar{\gamma} - \bar{\beta})(\sigma - \alpha) + (\gamma - \beta)(\bar{\sigma} - \bar{\alpha}) = 0.$$

これより

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{-((\bar{\beta} - \bar{\alpha})\gamma + (\beta - \alpha)\bar{\gamma})(\gamma - \beta) + ((\bar{\gamma} - \bar{\beta})\alpha + (\gamma - \beta)\bar{\alpha})(\beta - \alpha)}{(\beta - \alpha)(\bar{\gamma} - \bar{\beta}) - (\bar{\beta} - \bar{\alpha})(\gamma - \beta)} \\ &= \frac{\alpha^2 \bar{\beta} + \beta^2 \bar{\gamma} + \gamma^2 \bar{\alpha} - \bar{\alpha} \beta^2 - \bar{\beta} \gamma^2 - \bar{\gamma} \alpha^2 - \alpha |\beta|^2 - \beta |\gamma|^2 - \gamma |\alpha|^2 + |\alpha|^2 \beta + |\beta|^2 \gamma + |\gamma|^2 \alpha}{D(\alpha, \beta, \gamma)}. \end{aligned}$$

容易にわかるように, この点は α, β, γ に関して対称である. よって主張を得る. $\square$

注意 10.4 容易に確かめられるように

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta + \gamma) D(\alpha, \beta, \gamma) &= \alpha^2 \bar{\beta} + \beta^2 \bar{\gamma} + \gamma^2 \bar{\alpha} - \bar{\alpha} \beta^2 - \bar{\beta} \gamma^2 - \bar{\gamma} \alpha^2 \\ &\quad + \alpha |\beta|^2 + \beta |\gamma|^2 + \gamma |\alpha|^2 - |\alpha|^2 \beta - |\beta|^2 \gamma - |\gamma|^2 \alpha \end{aligned}$$

が成り立つ. このことから, $\triangle \alpha \beta \gamma$ の外心 ρ と垂心 σ は

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma - 2\rho$$

という関係で結ばれていることがわかる. 特に $|\alpha| = |\beta| = |\gamma|$ の場合には, 明らかに $\rho = 0$ であるから, $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$ となる.

上の注意で触れた関係式 $\sigma = \alpha + \beta + \gamma - 2\rho$ は

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \frac{2\rho + \sigma}{1 + 2}$$

と書くこともできるから:

系 10.5 三角形の重心は, 外心と垂心を結ぶ線分を $1:2$ に内分する.

定理 10.6 (三角形の内心) $\triangle \alpha \beta \gamma$ の 3 つの内角の二等分線は 1 点

$$\frac{|\gamma - \beta| \alpha + |\alpha - \gamma| \beta + |\beta - \alpha| \gamma}{|\gamma - \beta| + |\alpha - \gamma| + |\beta - \alpha|}$$

で交わる. この点を $\triangle \alpha \beta \gamma$ の内心という.

[証明] $\angle \alpha$ の二等分線と $\angle \beta$ の二等分線の交点を τ と置くと, 命題 6.14 より

$$\tau - \alpha - \frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha|} \cdot \frac{\gamma - \alpha}{|\gamma - \alpha|} (\bar{\tau} - \bar{\alpha}) = 0, \quad \tau - \beta - \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} \cdot \frac{\gamma - \beta}{|\gamma - \beta|} (\bar{\tau} - \bar{\beta}) = 0.$$

$\alpha_0 = \alpha - \gamma$, $\beta_0 = \beta - \gamma$, $\tau_0 = \tau - \gamma$ と置くと, 上の式は

$$\tau_0 - \alpha_0 + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{|\beta_0 - \alpha_0|} \cdot \frac{\alpha_0}{|\alpha_0|} (\bar{\tau}_0 - \bar{\alpha}_0) = 0, \quad \tau_0 - \beta_0 - \frac{\beta_0 - \alpha_0}{|\beta_0 - \alpha_0|} \cdot \frac{\beta_0}{|\beta_0|} (\bar{\tau}_0 - \bar{\beta}_0) = 0$$

となる. これより

$$\left(\frac{\alpha_0}{|\alpha_0|} + \frac{\beta_0}{|\beta_0|} \right) \overline{\tau_0} = |\alpha_0| + |\beta_0| - |\beta_0 - \alpha_0|,$$

従って

$$\overline{\left(\frac{\alpha_0}{|\alpha_0|} + \frac{\beta_0}{|\beta_0|} \right) \tau_0} = |\alpha_0| + |\beta_0| - |\beta_0 - \alpha_0|$$

を得る. ここで, 問 1.19 より

$$\left| \frac{\alpha_0}{|\alpha_0|} + \frac{\beta_0}{|\beta_0|} \right|^2 = \frac{(|\alpha_0| + |\beta_0| + |\beta_0 - \alpha_0|)(|\alpha_0| + |\beta_0| - |\beta_0 - \alpha_0|)}{|\alpha_0 \beta_0|}$$

であるから,

$$\tau_0 = \frac{|\beta_0| \alpha_0 + |\alpha_0| \beta_0}{|\alpha_0| + |\beta_0| + |\beta_0 - \alpha_0|},$$

すなわち

$$\tau - \gamma = \frac{|\beta - \gamma|(\alpha - \gamma) + |\alpha - \gamma|(\beta - \gamma)}{|\alpha - \gamma| + |\beta - \gamma| + |\beta - \alpha|}$$

がわかり,

$$\tau = \frac{|\gamma - \beta| \alpha + |\alpha - \gamma| \beta + |\beta - \alpha| \gamma}{|\gamma - \beta| + |\alpha - \gamma| + |\beta - \alpha|}$$

が得られる. この点は明らかに α, β, γ に関して対称である. よって主張を得る. $\square$

角の二等分線とは角を構成する 2 直線から等距離にある点の軌跡であるから, 三角形の各辺は内心から等距離の位置にある. 内心を中心として 3 辺に接する円を三角形の内接円という.

定理 10.7 (三角形の傍心) $\angle \alpha$ の外角の二等分線と $\angle \beta$ の外角の二等分線, ならびに $\angle \gamma$ の内角の二等分線は 1 点

$$\frac{|\gamma - \beta| \alpha + |\alpha - \gamma| \beta - |\beta - \alpha| \gamma}{|\gamma - \beta| + |\alpha - \gamma| - |\beta - \alpha|}$$

で交わる. また, $\angle \beta$ の外角の二等分線と $\angle \gamma$ の外角の二等分線, ならびに $\angle \alpha$ の内角の二等分線は 1 点

$$\frac{-|\gamma - \beta| \alpha + |\alpha - \gamma| \beta + |\beta - \alpha| \gamma}{-|\gamma - \beta| + |\alpha - \gamma| + |\beta - \alpha|}$$

で交わる. さらに, $\angle \gamma$ の外角の二等分線と $\angle \alpha$ の外角の二等分線, ならびに $\angle \beta$ の内角の二等分線は 1 点

$$\frac{|\gamma - \beta| \alpha - |\alpha - \gamma| \beta + |\beta - \alpha| \gamma}{|\gamma - \beta| - |\alpha - \gamma| + |\beta - \alpha|}$$

で交わる. これら 3 点を $\triangle \alpha \beta \gamma$ の傍心という.

[証明] 初めの主張のみを示す. $\angle \alpha$ の外角の二等分線と $\angle \beta$ の外角の二等分線の交点を v と置くと, 命題 6.14 より

$$v - \alpha + \frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha|} \cdot \frac{\gamma - \alpha}{|\gamma - \alpha|} (\overline{v} - \overline{\alpha}) = 0, \quad v - \beta + \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} \cdot \frac{\gamma - \beta}{|\gamma - \beta|} (\overline{v} - \overline{\beta}) = 0.$$

$\alpha_0 = \alpha - \gamma$, $\beta_0 = \beta - \gamma$, $v_0 = v - \gamma$ と置くと, 上の式は

$$v_0 - \alpha_0 - \frac{\beta_0 - \alpha_0}{|\beta_0 - \alpha_0|} \cdot \frac{\alpha_0}{|\alpha_0|} (\overline{v_0} - \overline{\alpha_0}) = 0, \quad v_0 - \beta_0 + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{|\beta_0 - \alpha_0|} \cdot \frac{\beta_0}{|\beta_0|} (\overline{v_0} - \overline{\beta_0}) = 0$$

となる。これより

$$\left(\frac{\alpha_0}{|\alpha_0|} + \frac{\beta_0}{|\beta_0|} \right) \overline{v_0} = |\alpha_0| + |\beta_0| + |\beta_0 - \alpha_0|,$$

従って

$$\overline{\left(\frac{\alpha_0}{|\alpha_0|} + \frac{\beta_0}{|\beta_0|} \right) v_0} = |\alpha_0| + |\beta_0| + |\beta_0 - \alpha_0|$$

を得る。ここで、問 1.19 より

$$\left| \frac{\alpha_0}{|\alpha_0|} + \frac{\beta_0}{|\beta_0|} \right|^2 = \frac{(|\alpha_0| + |\beta_0| + |\beta_0 - \alpha_0|)(|\alpha_0| + |\beta_0| - |\beta_0 - \alpha_0|)}{|\alpha_0 \beta_0|}$$

であるから、

$$v_0 = \frac{|\beta_0| \alpha_0 + |\alpha_0| \beta_0}{|\alpha_0| + |\beta_0| - |\beta_0 - \alpha_0|},$$

すなわち

$$v - \gamma = \frac{|\beta - \gamma|(\alpha - \gamma) + |\alpha - \gamma|(\beta - \gamma)}{|\alpha - \gamma| + |\beta - \gamma| - |\beta - \alpha|}$$

がわかり、

$$v = \frac{|\gamma - \beta| \alpha + |\alpha - \gamma| \beta - |\beta - \alpha| \gamma}{|\gamma - \beta| + |\alpha - \gamma| - |\beta - \alpha|}$$

が得られる。さらに

$$\frac{v_0}{\overline{v_0}} = \frac{|\beta_0| \alpha_0 + |\alpha_0| \beta_0}{|\beta_0| \overline{\alpha_0} + |\alpha_0| \overline{\beta_0}} = \frac{\alpha_0}{|\alpha_0|} \cdot \frac{\beta_0}{|\beta_0|}$$

より

$$v - \gamma - \frac{\alpha - \gamma}{|\alpha - \gamma|} \cdot \frac{\beta - \gamma}{|\beta - \gamma|} (\overline{v} - \overline{\gamma}) = 0$$

がわかるから、 v は $\angle \gamma$ の内角の二等分線上の点でもある。 $\square$

内心の場合と同様に、三角形の各辺 (の延長) は傍心から等距離の位置にある。傍心を中心として 3 辺 (の延長) に接する円を三角形の傍接円という。

注意 10.8 三角形の五心を定めるのに用いられた、中線、辺の垂直二等分線、垂線、角の二等分線といったものは、いずれも相似変換で保存される。従って、五心も相似変換で保存される。すなわち、相似変換 f に対して $\alpha' = f(\alpha)$, $\beta' = f(\beta)$, $\gamma' = f(\gamma)$ と置くとき、 $\triangle \alpha \beta \gamma$ の重心、外心、垂心、内心、傍心の f による像は $\triangle \alpha' \beta' \gamma'$ の重心、外心、垂心、内心、傍心にそれぞれ一致する。

演習問題

10.1 注意 10.4 の等式

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta + \gamma) D(\alpha, \beta, \gamma) &= \alpha^2 \overline{\beta} + \beta^2 \overline{\gamma} + \gamma^2 \overline{\alpha} - \overline{\alpha} \beta^2 - \overline{\beta} \gamma^2 - \overline{\gamma} \alpha^2 \\ &\quad + \alpha |\beta|^2 + \beta |\gamma|^2 + \gamma |\alpha|^2 - |\alpha|^2 \beta - |\beta|^2 \gamma - |\gamma|^2 \alpha \end{aligned}$$

を確かめよ。

10.2 (1) $\alpha' = -\alpha + \beta + \gamma$, $\beta' = \alpha - \beta + \gamma$, $\gamma' = \alpha + \beta - \gamma$ と置くとき、 $\triangle \alpha' \beta' \gamma'$ の外心は $\triangle \alpha \beta \gamma$ の垂心に一致することを示せ。

(2) $\triangle \alpha \beta \gamma$ の傍心を $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ とするとき、 $\triangle v_\alpha v_\beta v_\gamma$ の垂心は $\triangle \alpha \beta \gamma$ の内心に一致することを示せ。

11 九点円

前節に続き, 3 点 α, β, γ は共線でないとする. このとき, 適当な相似変換によってこれらの点を単位円上に写すことができる. そこで本節では, 初めから $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ であると仮定しておくことにする. このような仮定を設けても, 相似変換によって不変な性質を調べる際には, 一般性を失うことはない.

$\triangle\alpha\beta\gamma$ の垂心 $\alpha + \beta + \gamma$ を σ と置くと (cf. 注意 10.4),

$$\left| \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{-\gamma}{2} \right| = \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{-\alpha}{2} \right| = \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{\gamma + \alpha}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{-\beta}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

つまり, 三角形の各辺の中点は $\frac{\sigma}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円の上にある. また, 明らかに

$$\left| \frac{\alpha + \sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{\alpha}{2} \right| = \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{\beta + \sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{\beta}{2} \right| = \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{\gamma + \sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{\gamma}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

従って, 三角形の各頂点と垂心の中点も同じ円の上にある. さて, γ から対辺 (の延長) に下ろした垂線の足を ν と置くと, 問 6.12 より

$$\nu = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\bar{\gamma}}{2} = \frac{\sigma}{2} - \frac{\alpha\beta}{2\gamma}.$$

同様の計算により, α, β から対辺に下ろした垂線の足をそれぞれ λ, μ と置くと,

$$\lambda = \frac{\sigma}{2} - \frac{\beta\gamma}{2\alpha}, \quad \mu = \frac{\sigma}{2} - \frac{\gamma\alpha}{2\beta}$$

となることがわかるから,

$$\left| \lambda - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{-\beta\gamma}{2\alpha} \right| = \frac{1}{2}, \quad \left| \mu - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{-\gamma\alpha}{2\beta} \right| = \frac{1}{2}, \quad \left| \nu - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{-\alpha\beta}{2\gamma} \right| = \frac{1}{2}.$$

よって, λ, μ, ν も同じ円の上にある. 以上をまとめて:

定理 11.1 (九点円の定理) 三角形の

- (1) 各辺の中点,
- (2) 各頂点と垂心の中点,
- (3) 各頂点から対辺に下ろした垂線の足

は, ひとつの円の上にある (この円を三角形の九点円という). さらに, その円の中心は外心と垂心の中点で, 半径は外接円の半径の $\frac{1}{2}$ である.

$\angle\alpha$ の二等分線は単位円と 2 点で交わり, 交点のひとつは α である. もうひとつの交点は, β と γ を結ぶ 2 つの円弧のうち α を含まない方の中点である. この点を α^* と置く. 同様にして β^*, γ^* を定めると, 次が成り立つ (cf. 例 4.10):

$$(\alpha^*)^2 = \beta\gamma, \quad (\beta^*)^2 = \gamma\alpha, \quad (\gamma^*)^2 = \alpha\beta.$$

いま ξ, η, ζ をそれぞれ α, β, γ の平方根 (のひとつ) とすると,

$$(\eta\zeta)^2 = \beta\gamma, \quad (\zeta\xi)^2 = \gamma\alpha, \quad (\xi\eta)^2 = \alpha\beta$$

となるから,

$$\alpha^* = \pm\eta\zeta, \quad \beta^* = \pm\zeta\xi, \quad \gamma^* = \pm\xi\eta.$$

ここで、必要であれば ξ, η, ζ (の一部) をそれぞれ $-\xi, -\eta, -\zeta$ で置き換えれば、

$$\alpha^* = -\eta\zeta, \quad \beta^* = -\zeta\xi, \quad \gamma^* = -\xi\eta$$

が成り立つようにできる。例えば

$$\alpha = 1, \quad \beta = e^{i\theta}, \quad \gamma = e^{i\varphi} \quad (0 < \theta < \varphi < 2\pi)$$

の場合、

$$\alpha^* = e^{i(\theta+\varphi)/2}, \quad \beta^* = -e^{i\varphi/2}, \quad \gamma^* = e^{i\theta/2}$$

となるから、

$$\xi = -1, \quad \eta = e^{i\theta/2}, \quad \zeta = -e^{i\varphi/2}$$

ならびに

$$\xi = 1, \quad \eta = -e^{i\theta/2}, \quad \zeta = e^{i\varphi/2}$$

は上の条件をみたす。

さて、 $\angle\alpha$ の二等分線は 2 点 α, α^* を通る直線に一致し、 $\angle\beta$ の二等分線は 2 点 β, β^* を通る直線に一致する。従って、これら 2 直線の交点、すなわち $\triangle\alpha\beta\gamma$ の内心を τ と置くと、問 6.9 より

$$\bar{\tau} = \frac{\alpha + \alpha^* - \beta - \beta^*}{\alpha\alpha^* - \beta\beta^*} = \frac{\xi^2 - \eta\zeta - \eta^2 + \zeta\xi}{-\xi^2\eta\zeta + \xi\eta^2\zeta} = -\frac{\xi + \eta + \zeta}{\xi\eta\zeta} = -\left(\frac{1}{\xi\eta} + \frac{1}{\eta\zeta} + \frac{1}{\zeta\xi}\right) = -\overline{(\xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi)}.$$

従って

$$\tau = -\overline{\left(\frac{\xi + \eta + \zeta}{\xi\eta\zeta}\right)} = -(\xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi) = \alpha^* + \beta^* + \gamma^*.$$

つまり、 τ は $\triangle\alpha^*\beta^*\gamma^*$ の垂心でもある。また

$$|\tau|^2 = \frac{(\xi + \eta + \zeta)(\xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi)}{\xi\eta\zeta}.$$

さらに、

$$\frac{\sigma}{2} - \tau = \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 2(\xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi)}{2} = \frac{(\xi + \eta + \zeta)^2}{2}$$

より

$$\left|\frac{\sigma}{2} - \tau\right| = \frac{|\xi + \eta + \zeta|^2}{2} = \frac{|\tau|^2}{2}$$

もわかる。

$\triangle\alpha\beta\gamma$ の内接円の半径は、点 τ と γ の対辺との距離に他ならないから、問 6.12 より

$$\frac{|\alpha + \beta - \tau - \alpha\beta\bar{\tau}|}{2}$$

により与えられる。ここで

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - \tau - \alpha\beta\bar{\tau} &= \xi^2 + \eta^2 + \xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi + \frac{\xi\eta(\xi + \eta + \zeta)}{\zeta} \\ &= \frac{\xi^2\eta + \xi\eta^2 + \eta^2\zeta + \eta\zeta^2 + \zeta^2\xi + \zeta\xi^2 + 2\xi\eta\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{(\xi + \eta + \zeta)(\xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi) - \xi\eta\zeta}{\zeta} \\ &= \xi\eta(|\tau|^2 - 1). \end{aligned}$$

また, 明らかに $|\tau| < 1$ である. 従って

$$\frac{|\alpha + \beta - \tau - \alpha\beta\bar{\tau}|}{2} = \frac{1 - |\tau|^2}{2} = \frac{1}{2} - \left| \frac{\sigma}{2} - \tau \right|.$$

つまり, 次が示せたことになる:

$$(\text{内接円の半径}) = (\text{九点円の半径}) - (\text{九点円の中心と内心との距離}).$$

すなわち:

定理 11.2 (Feuerbach の定理 I) 三角形の内接円は九点円に内接する.

問 11.3 点 τ から γ の対辺に下ろした垂線の足 ($\triangle\alpha\beta\gamma$ の内接円の接点のひとつ) は

$$\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha^* + \beta^* - \alpha\beta(\bar{\alpha}^* + \bar{\beta}^*)}{2}$$

となることを示せ.

$\angle\alpha$ の外角の二等分線と $\angle\beta$ の外角の二等分線はそれぞれ

$$z - \alpha\alpha^*\bar{z} = \alpha - \alpha^*, \quad z - \beta\beta^*\bar{z} = \beta - \beta^*$$

により与えられる (証明は演習問題). これらの交点 ($\triangle\alpha\beta\gamma$ の傍心のひとつ) を v と置くと, 上と同様の計算により

$$v = \overline{\left(\frac{\xi + \eta - \zeta}{\xi\eta\zeta} \right)} = -\xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi = -\alpha^* - \beta^* + \gamma^*$$

となることがわかる. これより

$$|v|^2 = \frac{(\xi + \eta - \zeta)(-\xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi)}{\xi\eta\zeta}$$

と

$$\left| \frac{\sigma}{2} - v \right| = \frac{|\xi + \eta - \zeta|^2}{2} = \frac{|v|^2}{2},$$

ならびに点 v と γ の対辺との距離 (傍接円の半径) は

$$\frac{|\alpha + \beta - v - \alpha\beta\bar{v}|}{2} = \left| \frac{|v|^2 - 1}{2} \right|$$

となることもわかる. さて, $\tau = \alpha^* + \beta^* + \gamma^*$ と $v = -\alpha^* - \beta^* + \gamma^*$ より

$$\frac{\tau + v}{2} = \gamma^*.$$

つまり, 内心 τ と傍心 v の中点は, 単位円 ($\triangle\alpha\beta\gamma$ の外接円) 上の点 γ^* に一致する. これより $|v| > 1$ がわかるから, 傍接円の半径は

$$\frac{|v|^2 - 1}{2} = \left| \frac{\sigma}{2} - v \right| - \frac{1}{2}$$

となり,

$$(\text{傍接円の半径}) = (\text{九点円の中心と傍心との距離}) - (\text{九点円の半径})$$

が得られる. 残る 2 つの傍心についても全く同様であるから:

定理 11.4 三角形の内心と傍心の midpoint は外接円上にある.

定理 11.5 (Feuerbach の定理 II) 三角形の傍接円は九点円に外接する.

問 11.6 点 v から γ の対辺に下ろした垂線の足 ($\triangle\alpha\beta\gamma$ の傍接円の接点のひとつ) は

$$\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha^* + \beta^* - \alpha\beta(\overline{\alpha^*} + \overline{\beta^*})}{2}$$

となることを示せ.

演習問題

11.1 $\angle\alpha$ の外角の二等分線と $\angle\beta$ の外角の二等分線はそれぞれ

$$z - \alpha\alpha^*\bar{z} = \alpha - \alpha^*, \quad z - \beta\beta^*\bar{z} = \beta - \beta^*$$

により与えられることを示せ.

11.2 (1) 外接円上の任意の点と垂心との midpoint は九点円上にあることを示せ.

(2) 相異なる傍心の midpoint は外接円上にあることを示せ.

12 Morley の定理

本節でも引き続き 3 点 α, β, γ は共線でないとし、適当な相似変換を施して

$$\alpha = 1, \quad \beta = e^{i\theta}, \quad \gamma = e^{i\varphi} \quad (0 < \theta < \varphi < 2\pi)$$

であるようにする. このとき $\triangle\alpha\beta\gamma$ は単位円 $|z| = 1$ に内接する. また, $\eta = e^{i\theta/3}$ と置くと, η, η^2 は α と β を結ぶ円弧 (γ を含まない方) の三等分点を与える. 同様に, $\zeta = e^{-i(2\pi-\varphi)/3}$ と置くと, ζ, ζ^2 は α と γ を結ぶ円弧 (β を含まない方) の三等分点を与える. さらに, β と γ を結ぶ円弧 (α を含まない方) の三等分点は

$$e^{i(2\theta+\varphi)/3} = \omega\eta^2\zeta, \quad e^{i(\theta+2\varphi)/3} = \omega^2\eta\zeta^2$$

となる. ただし $\omega = e^{2\pi i/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ である. これらの点は単位円上に

$$\alpha = 1, \quad \eta, \quad \eta^2, \quad \beta = \eta^3, \quad \omega\eta^2\zeta, \quad \omega^2\eta\zeta^2, \quad \gamma = \zeta^3, \quad \zeta^2, \quad \zeta$$

の順に並んでいる.

2 点 $\alpha, \omega\eta^2\zeta$ を通る直線を $l_{\alpha,\beta}$ とし, 2 点 $\alpha, \omega^2\eta\zeta^2$ を通る直線を $l_{\alpha,\gamma}$ とすると, これらは $\angle\alpha$ を三等分する. 同様に, 2 点 β, ζ^2 を通る直線を $l_{\beta,\gamma}$ とし, 2 点 β, ζ を通る直線を $l_{\beta,\alpha}$ とすると, これらは $\angle\beta$ を三等分する. さらに, 2 点 γ, η を通る直線を $l_{\gamma,\alpha}$ とし, 2 点 γ, η^2 を通る直線を $l_{\gamma,\beta}$ とすると, これらは $\angle\gamma$ を三等分する.

直線 $l_{\beta,\gamma}$, $l_{\gamma,\beta}$ の交点, 直線 $l_{\gamma,\alpha}$, $l_{\alpha,\gamma}$ の交点, 直線 $l_{\alpha,\beta}$, $l_{\beta,\alpha}$ の交点をそれぞれ λ, μ, ν と置く. このとき, 問 6.9 より,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\overline{\eta^3 + \zeta^2 - \zeta^3 - \eta^2}}{\eta^3\zeta^2 - \eta^2\zeta^3} = \frac{\frac{1}{\eta^3} + \frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{\zeta^3} - \frac{1}{\eta^2}}{\frac{1}{\eta^3\zeta^2} - \frac{1}{\eta^2\zeta^3}} = \frac{\zeta^3 + \eta^3\zeta - \eta^3 - \eta\zeta^3}{\zeta - \eta} = \eta^2 + \eta\zeta + \zeta^2 - \eta^2\zeta - \eta\zeta^2, \\ \mu &= \frac{\overline{\zeta^3 + \eta - 1 - \omega^2\eta\zeta^2}}{\eta\zeta^3 - \omega^2\eta\zeta^2} = \frac{\frac{1}{\zeta^3} + \frac{1}{\eta} - 1 - \frac{\omega}{\eta\zeta^2}}{\frac{1}{\eta\zeta^3} - \frac{\omega}{\eta\zeta^2}} = \frac{\eta + \zeta^3 - \eta\zeta^3 - \omega\zeta}{1 - \omega\zeta} = \omega^2\eta\zeta^2 + \omega\eta\zeta + \eta - \omega^2\zeta^2 - \omega\zeta, \\ \nu &= \frac{\overline{1 + \omega\eta^2\zeta - \eta^3 - \zeta}}{\omega\eta^2\zeta - \eta^3\zeta} = \frac{1 + \frac{\omega^2}{\eta^2\zeta} - \frac{1}{\eta^3} - \frac{1}{\zeta}}{\frac{\omega^2}{\eta^2\zeta} - \frac{1}{\eta^3\zeta}} = \frac{\eta^3\zeta + \omega^2\eta - \zeta - \eta^3}{\omega^2\eta - 1} = \omega\eta^2\zeta + \omega^2\eta\zeta + \zeta - \omega\eta^2 - \omega^2\eta. \end{aligned}$$

従って

$$\lambda + \omega\mu + \omega^2\nu = (\omega^2 + \omega + 1)\eta\zeta = 0$$

となり, 命題 3.11 より $\triangle\lambda\mu\nu$ は正三角形となることがわかる. すなわち:

定理 12.1 (Morley の定理 I) 三角形の 3 つの内角の隣り合った三等分線の交点は正三角形をつくる.

直線 $l_{\alpha,\beta}$ を α を中心として $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転したものを $l_{\alpha,\beta}^*$ とし, 直線 $l_{\alpha,\gamma}$ を α を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転したものを $l_{\alpha,\gamma}^*$ とすると, これらは $\angle\alpha$ の外角を三等分線する. また, これらの直線はそれぞれ

$$l_{\alpha,\beta}^*: z + \eta^2\zeta\bar{z} = 1 + \eta^2\zeta, \quad l_{\alpha,\gamma}^*: z + \eta\zeta^2\bar{z} = 1 + \eta\zeta^2$$

により与えられる (証明は演習問題). 同様に, 直線 $l_{\beta,\gamma}$ を β を中心として $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転したものを $l_{\beta,\gamma}^*$ とし, 直線 $l_{\beta,\alpha}$ を β を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転したものを $l_{\beta,\alpha}^*$ とすると, これらは $\angle\beta$ の外角を三等分線し, それぞれ

$$l_{\beta,\gamma}^* : z + \omega^2 \eta^3 \zeta^2 \bar{z} = \eta^3 + \omega^2 \zeta^2, \quad l_{\beta,\alpha}^* : z + \omega \eta^3 \zeta \bar{z} = \eta^3 + \omega \zeta$$

により与えられる. さらに, 直線 $l_{\gamma,\alpha}$ を γ を中心として $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転したものを $l_{\gamma,\alpha}^*$ とし, 直線 $l_{\gamma,\beta}$ を γ を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転したものを $l_{\gamma,\beta}^*$ とすると, これらは $\angle\gamma$ の外角を三等分線し, それぞれ

$$l_{\gamma,\alpha}^* : z + \omega^2 \eta \zeta^3 \bar{z} = \omega^2 \eta + \zeta^3, \quad l_{\gamma,\beta}^* : z + \omega \eta^2 \zeta^3 \bar{z} = \omega \eta^2 + \zeta^3$$

により与えられる.

直線 $l_{\beta,\gamma}^*, l_{\gamma,\beta}^*$ の交点, 直線 $l_{\gamma,\alpha}^*, l_{\alpha,\gamma}^*$ の交点, 直線 $l_{\alpha,\beta}^*, l_{\beta,\alpha}^*$ の交点をそれぞれ λ^*, μ^*, ν^* と置くと,

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \omega \eta^2 + \eta \zeta + \omega^2 \zeta^2 - \omega^2 \eta^2 \zeta - \omega \eta \zeta^2, \\ \mu^* &= \eta \zeta^2 + \omega \eta \zeta + \omega^2 \eta - \omega \zeta^2 - \omega^2 \zeta, \\ \nu^* &= \eta^2 \zeta + \omega^2 \eta \zeta + \omega \zeta - \omega^2 \eta^2 - \omega \eta \end{aligned}$$

となる (計算の詳細は略). 従って

$$\lambda^* + \omega \mu^* + \omega^2 \nu^* = (\omega^2 + \omega + 1) \eta \zeta = 0$$

となり, 再び命題 3.11 より $\triangle \lambda^* \mu^* \nu^*$ は正三角形となることがわかる. すなわち:

定理 12.2 (Morley の定理 II) 三角形の 3 つの外角の隣り合った三等分線の交点は正三角形をつくる.

同様に考えることにより,

直線 $l_{\beta,\gamma}^*, l_{\gamma,\beta}^*$ の交点 (λ^*), 直線 $l_{\gamma,\alpha}^*, l_{\alpha,\gamma}^*$ の交点, 直線 $l_{\alpha,\beta}^*, l_{\beta,\alpha}^*$ の交点を頂点とする三角形,
直線 $l_{\beta,\gamma}, l_{\gamma,\beta}^*$ の交点, 直線 $l_{\gamma,\alpha}^*, l_{\alpha,\gamma}^*$ の交点 (μ^*), 直線 $l_{\alpha,\beta}^*, l_{\beta,\alpha}$ の交点を頂点とする三角形,
直線 $l_{\beta,\gamma}^*, l_{\gamma,\beta}$ の交点, 直線 $l_{\gamma,\alpha}, l_{\alpha,\gamma}^*$ の交点, 直線 $l_{\alpha,\beta}^*, l_{\beta,\alpha}^*$ の交点 (ν^*) を頂点とする三角形

も正三角形となることが示せる (証明は略).

演習問題

12.1 直線 $l_{\alpha,\beta}$ を α を中心として $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した $l_{\alpha,\beta}^*$ と, 直線 $l_{\alpha,\gamma}$ を α を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した $l_{\alpha,\gamma}^*$ は, それぞれ

$$l_{\alpha,\beta}^* : z + \eta^2 \zeta \bar{z} = 1 + \eta^2 \zeta, \quad l_{\alpha,\gamma}^* : z + \eta \zeta^2 \bar{z} = 1 + \eta \zeta^2$$

により与えられることを示せ.

参考文献

- [1] 安藤哲哉, 三角形と円の幾何学, 海鳴社, 2006.
- [2] 井ノ口順一, 幾何学いろいろ — 距離と合同からはじめる大学幾何学入門, 日本評論社, 2007.
- [3] L. Hahn, Complex Numbers and Geometry, Mathematical Association of America Textbooks, The Mathematical Association of America, 1994.
- [4] 片山孝次, 複素数の幾何学, 新装版 数学入門シリーズ, 岩波書店, 2015.
- [5] 小平邦彦, 幾何への誘い, 岩波現代文庫 G7, 岩波書店, 2009.
- [6] 寺阪英孝, 幾何とその構造, 数学講座 9, 筑摩書房, 1971.

問題略解

問 1.2 $\omega^3 = 1$ より

$$(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma)(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + (\omega^2 + \omega)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

となるから, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ より求める等式を得る.

問 1.4 まず $i > 0$ とすると, (a) より, $0 < i$ の両辺に $i (> 0)$ を掛けて

$$i \cdot 0 < i \cdot i$$

を得る. ところが, $i \cdot 0 = 0$, $i \cdot i = -1$ であるから, $0 < -1$ と矛盾を生じる.

次に $i < 0$ とすると, (b) より, $i < 0$ の両辺に $i (< 0)$ を掛けて

$$i \cdot i > i \cdot 0$$

を得る. よって, 上と同様に $-1 > 0$ と矛盾を生じる.

問 1.5 $a = \operatorname{Re} \alpha$, $b = \operatorname{Im} \alpha$, $c = \operatorname{Re} \beta$, $d = \operatorname{Im} \beta$ とすると,

$$\alpha + \beta = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d), \quad k\alpha = k(a + ib) = (ka) + i(kb)$$

となるから,

$$\operatorname{Re}(\alpha + \beta) = a + c, \quad \operatorname{Im}(\alpha + \beta) = b + d, \quad \operatorname{Re}(k\alpha) = ka, \quad \operatorname{Im}(k\alpha) = kb.$$

また,

$$i\alpha = i(a + ib) = -b + ia$$

より

$$\operatorname{Re}(i\alpha) = -b, \quad \operatorname{Im}(i\alpha) = a.$$

問 1.7

$$\left(\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{2i}{2} = i.$$

問 1.11 $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) とすると,

$$\overline{\alpha - \beta} = \overline{(a - c) + i(b - d)} = (a - c) - i(b - d) = (a - ib) - (c - id) = \overline{\alpha} - \overline{\beta}.$$

また,

$$\overline{\alpha \beta} = \overline{\alpha} \overline{\beta} = \overline{\alpha} \beta.$$

問 1.18

$$\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{|\alpha|^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha \overline{\alpha}} = \frac{\alpha}{\overline{\alpha}}.$$

問 1.19

$$\left| \frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{\beta}{|\beta|} \right|^2 = \left| \frac{|\beta|\alpha + |\alpha|\beta}{|\alpha\beta|} \right|^2 = \frac{(|\beta|\alpha + |\alpha|\beta)(|\beta|\bar{\alpha} + |\alpha|\bar{\beta})}{|\alpha\beta|^2}.$$

ここで

$$(|\beta|\alpha + |\alpha|\beta)(|\beta|\bar{\alpha} + |\alpha|\bar{\beta}) = 2|\alpha\beta|^2 + |\alpha\beta|(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) = |\alpha\beta|(2|\alpha\beta| + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta)$$

であるから,

$$\left| \frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{\beta}{|\beta|} \right|^2 = \frac{2|\alpha\beta| + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}{|\alpha\beta|}.$$

他方

$$\begin{aligned} (|\alpha| + |\beta| + |\alpha - \beta|)(|\alpha| + |\beta| - |\alpha - \beta|) &= (|\alpha| + |\beta|)^2 - |\alpha - \beta|^2 \\ &= (|\alpha|^2 + 2|\alpha\beta| + |\beta|^2) - (|\alpha|^2 - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + |\beta|^2) \\ &= 2|\alpha\beta| + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta. \end{aligned}$$

以上により求める等式を得る.

演習問題 1.1

$$(-i)^3 = i, \quad (2+3i)\overline{(3+2i)} = 12+5i, \quad \frac{3+4i}{|3+4i|} = \frac{3+4i}{5}, \quad \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{5-3i}{5+3i} + \frac{5+3i}{5-3i} = \frac{16}{17}$$

より, 実部はそれぞれ

$$0, \quad 12, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{16}{17}$$

で, 虚部はそれぞれ

$$1, \quad 5, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 0.$$

演習問題 1.2 $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ より

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \quad \bar{\beta} = \frac{1}{\beta}, \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$$

となるから,

$$\overline{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}.$$

同様に, $|\alpha\beta| = |\beta\gamma| = |\gamma\alpha| = 1$ より

$$\overline{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma}.$$

また, $|\alpha\beta\gamma| = 1$ より

$$\overline{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

問 2.3 $-\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha - \beta + \gamma$, $\alpha + \beta - \gamma$ の 3 点.

問 2.6 (1) 例 1.15 より

$$|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = (|\alpha|^2 + 2\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta}) + |\beta|^2) + (|\alpha|^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta}) + |\beta|^2) = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2).$$

(2) 4 点 $0, \alpha, \beta, \alpha + \beta$ を頂点とする平行四辺形において

$$(\text{対角線の長さの 2 乗和}) = (\text{辺の長さの 2 乗和})$$

が成り立つという中線定理を意味する.

演習問題 2.1 (1) 例 2.5 より

$$|\gamma - \alpha||\gamma - \beta| = |1 - |\gamma|^2|, \quad |\gamma - \alpha'||\gamma - \beta'| = |1 - |\gamma|^2|$$

となることによる.

(2)

$$(\gamma \text{ と } \alpha \text{ の距離}) \cdot (\gamma \text{ と } \beta \text{ の距離}) = (\gamma \text{ と } \alpha' \text{ の距離}) \cdot (\gamma \text{ と } \beta' \text{ の距離})$$

が成り立つという方冪の定理を意味する.

演習問題 2.2 (1)

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{(1+\alpha)(1-\bar{\alpha})}{|1-\alpha|^2} = \frac{1+\alpha-\bar{\alpha}-|\alpha|^2}{|1-\alpha|^2} = \frac{1+2i\operatorname{Im}\alpha-|\alpha|^2}{|1-\alpha|^2}$$

より

$$\operatorname{Re} \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\alpha|^2}.$$

従って, $|\alpha| < 1$ ならば $\operatorname{Re} \frac{1+\alpha}{1-\alpha} > 0$ となる.

(2)

$$|\alpha \pm i|^2 = (\alpha \pm i)(\bar{\alpha} \mp i) = |\alpha|^2 \mp i\alpha \pm i\bar{\alpha} + 1 = |\alpha|^2 \pm 2\operatorname{Im}\alpha + 1$$

より

$$|\alpha + i|^2 - |\alpha - i|^2 = 4\operatorname{Im}\alpha.$$

従って, $\operatorname{Im}\alpha > 0$ ならば $|\alpha + i|^2 - |\alpha - i|^2 > 0$, すなわち $\left| \frac{\alpha - i}{\alpha + i} \right| < 1$ となる.

問 3.7 まず

$$\arg(-\alpha) = \arg((-1)\alpha) = \arg(-1) + \arg\alpha = \pi + \arg\alpha.$$

また, $\bar{\alpha} = \frac{|\alpha|^2}{\alpha}$ より

$$\arg \bar{\alpha} = \arg \frac{|\alpha|^2}{\alpha} = \arg |\alpha|^2 - \arg \alpha = 0 - \arg \alpha = -\arg \alpha.$$

問 3.12 次の 3 組:

$$(1) \alpha + i(\beta - \alpha), \beta + i(\beta - \alpha),$$

$$(2) \alpha - i(\beta - \alpha), \beta - i(\beta - \alpha),$$

$$(3) \frac{\alpha + \beta + i(\beta - \alpha)}{2}, \frac{\alpha + \beta - i(\beta - \alpha)}{2}.$$

問 3.14 $2\angle\beta\alpha\gamma = \angle\beta 0\gamma$ が成り立つという円周角の定理を意味する.

問 3.19 命題 3.15 の (2) より, $\triangle\alpha\beta\gamma$ の面積は

$$\frac{1}{2} |\operatorname{Im}((\beta - \alpha)(\overline{\gamma - \alpha}))| = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}((\beta - \alpha)(\overline{\gamma} - \overline{\alpha}))|$$

に一致する. ここで, 命題 3.17 の証明における計算より

$$2i \operatorname{Im}((\beta - \alpha)(\overline{\gamma} - \overline{\alpha})) = (\beta - \alpha)(\overline{\gamma} - \overline{\alpha}) - (\overline{\beta} - \overline{\alpha})(\gamma - \alpha) = 2i \operatorname{Im}(\alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\gamma} + \gamma\overline{\alpha})$$

がわかるから,

$$|\operatorname{Im}((\beta - \alpha)(\overline{\gamma} - \overline{\alpha}))| = |\operatorname{Im}(\alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\gamma} + \gamma\overline{\alpha})|.$$

演習問題 3.1 それぞれ

$$4(\cos \pi + i \sin \pi), 5\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right), 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right), 2\sqrt{3}\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right).$$

演習問題 3.2 (1) 仮に $\alpha = \beta$ とすると, $\gamma = -\alpha - \beta = -2\alpha$ より $|\gamma| = 2|\alpha| = 2$ となって仮定に反する. よって $\alpha \neq \beta$. 同様にして $\beta \neq \gamma$ と $\gamma \neq \alpha$ もわかる.

(2) 仮定と演習問題 1.2 より $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$ となることがわかるから,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 0.$$

よって, 命題 3.11 より $\triangle\alpha\beta\gamma$ は正三角形である.

問 4.8

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \\ \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) &= \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, \\ \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right) \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) &= \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.\end{aligned}$$

演習問題 4.1 -4 の極形式表示は $4(\cos \pi + i \sin \pi)$ で与えられるから, 求める解は

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) &= 1 + i, \\ \left(\cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4}\right) \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) &= i(1 + i) = -1 + i, \\ \left(\cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4}\right) \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) &= -(1 + i) = -1 - i, \\ \left(\cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4}\right) \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) &= -i(1 + i) = 1 - i\end{aligned}$$

(図は略).

演習問題 4.2 まず, 仮に $\gamma = 0$ であるとする, $n\alpha + m\beta = 0$ より $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{m}{n} \in \mathbb{R}$ と仮定に反するから, $\gamma \neq 0$. 次に,

$$\arg \frac{\gamma}{\alpha} = \arg \frac{\beta}{\gamma} \iff \frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{\left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|} = \frac{\frac{\beta}{\gamma}}{\left|\frac{\beta}{\gamma}\right|} \iff \left(\frac{\gamma}{|\gamma|}\right)^2 = \frac{\alpha}{|\alpha|} \cdot \frac{\beta}{|\beta|}.$$

ここで,

$$\left(\frac{\gamma}{|\gamma|}\right)^2 = \frac{\gamma}{\bar{\gamma}} = \frac{n\alpha + m\beta}{n\bar{\alpha} + m\bar{\beta}}$$

より,

$$\left(\frac{\gamma}{|\gamma|}\right)^2 = \frac{\alpha}{|\alpha|} \cdot \frac{\beta}{|\beta|} \iff |\alpha\beta|(n\alpha + m\beta) = \alpha\beta(n\bar{\alpha} + m\bar{\beta}).$$

また,

$$|\alpha\beta|(n\alpha + m\beta) - \alpha\beta(n\bar{\alpha} + m\bar{\beta}) = (|\beta|\alpha - |\alpha|\beta)(n|\alpha| - m|\beta|).$$

さらに, $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{R}$ より $|\beta|\alpha - |\alpha|\beta \neq 0$ であるから,

$$|\alpha\beta|(n\alpha + m\beta) = \alpha\beta(n\bar{\alpha} + m\bar{\beta}) \iff n|\alpha| - m|\beta| = 0 \iff \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \frac{m}{n}.$$

問 5.6

$$e^{i\theta} + 1 = e^{i\theta/2} (e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}) = 2e^{i\theta/2} \frac{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}}{2} = 2e^{i\theta/2} \cos \frac{\theta}{2},$$

$$e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta/2} (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) = 2ie^{i\theta/2} \frac{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}{2i} = 2ie^{i\theta/2} \sin \frac{\theta}{2}.$$

演習問題 5.1

$$\cos^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}\right) = \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

$$\sin^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}}{-4} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}\right) = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}.$$

演習問題 5.2

$$\sum_{k=0}^n r^k e^{ik\theta} = \frac{1 - r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}}{1 - r e^{i\theta}}$$

において $n \rightarrow \infty$ とすると, $0 < r < 1$ より $r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} \rightarrow 0$ となるから,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{ik\theta} = \frac{1}{1 - r e^{i\theta}}.$$

ここで,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k (\cos k\theta + i \sin k\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos k\theta + i \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin k\theta.$$

また,

$$\frac{1}{1 - r e^{i\theta}} = \frac{1 - r e^{-i\theta}}{(1 - r e^{i\theta})(1 - r e^{-i\theta})} = \frac{1 - r(\cos \theta - i \sin \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} = \frac{1 - r \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} + i \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

以上より求める等式を得る.

問 6.4 (1) 命題 3.16 の (2) より, $z \in \mathbb{C}$ ($z \neq \alpha$) に対して

$$\vec{\alpha z} \perp \vec{\nu} \iff \bar{\nu}(z - \alpha) + \nu(\bar{z} - \bar{\alpha}) = 0$$

が成り立つことによる.

(2)

$$\bar{\nu}(z - \alpha) + \nu(\bar{z} - \bar{\alpha}) = \bar{\nu}z + \nu\bar{z} - (\bar{\nu}\alpha + \nu\bar{\alpha}) = \bar{\nu}z + \nu\bar{z} - 2\operatorname{Re}(\bar{\nu}\alpha)$$

より, $c = -2\operatorname{Re}(\bar{\nu}\alpha)$ と置けば $c \in \mathbb{R}$ で, 直線の方程式は

$$\bar{\nu}z + \nu\bar{z} + c = 0$$

となる. 逆に, $c \in \mathbb{R}$ に対して $-2\bar{\nu}\alpha = c$ により α を定めれば, $-2\nu\bar{\alpha} = c$ より $c = -\bar{\nu}\alpha - \nu\bar{\alpha}$ が成り立つから,

$$\bar{\nu}z + \nu\bar{z} + c = \bar{\nu}z + \nu\bar{z} - \bar{\nu}\alpha - \nu\bar{\alpha} = \bar{\nu}(z - \alpha) + \nu(\bar{z} - \bar{\alpha})$$

が得られる.

問 6.7 $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$, $\bar{\beta} = \frac{1}{\beta}$ より

$$(\bar{\beta} - \bar{\alpha})z - (\beta - \alpha)\bar{z} - \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)z - (\beta - \alpha)\bar{z} - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta}(z + \alpha\beta\bar{z} - \alpha - \beta)$$

となることによる.

問 6.9 $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$, $\bar{\beta} = \frac{1}{\beta}$, $\bar{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$, $\bar{\delta} = \frac{1}{\delta}$ より

$$(\beta - \alpha)(\bar{\delta} - \bar{\gamma}) - (\bar{\beta} - \bar{\alpha})(\delta - \gamma) = (\beta - \alpha)\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\gamma}\right) - \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)(\delta - \gamma) = -\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)(\alpha\beta - \gamma\delta)}{\alpha\beta\gamma\delta}$$

となるから,

$$\vec{\alpha\beta} \parallel \vec{\gamma\delta} \iff (\beta - \alpha)(\bar{\delta} - \bar{\gamma}) - (\bar{\beta} - \bar{\alpha})(\delta - \gamma) = 0 \iff \alpha\beta = \gamma\delta.$$

また, 問 6.7 より, α, β を通る直線, γ, δ を通る直線はそれぞれ

$$z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta, \quad z + \gamma\delta\bar{z} = \gamma + \delta$$

により与えられる. 2 式から z を消去すると

$$(\alpha\beta - \gamma\delta)\bar{z} = \alpha + \beta - \gamma - \delta$$

となるから, $\alpha\beta \neq \gamma\delta$ のとき, 交点 z は

$$\bar{z} = \frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta}{\alpha\beta - \gamma\delta},$$

すなわち

$$z = \overline{\left(\frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta}{\alpha\beta - \gamma\delta}\right)}$$

により与えられる.

問 6.12 $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$, $\bar{\beta} = \frac{1}{\beta}$ より

$$\frac{(\bar{\beta} - \bar{\alpha})\gamma - (\beta - \alpha)\bar{\gamma} - \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}{2(\bar{\beta} - \bar{\alpha})} = \frac{(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha})\gamma - (\beta - \alpha)\bar{\gamma} - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}}{2(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha})} = \frac{\gamma + \alpha\beta\bar{\gamma} - \alpha - \beta}{2}$$

となるから、垂線の足は

$$\gamma - \frac{(\bar{\beta} - \bar{\alpha})\gamma - (\beta - \alpha)\bar{\gamma} - \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}{2(\bar{\beta} - \bar{\alpha})} = \gamma - \frac{\gamma + \alpha\beta\bar{\gamma} - \alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\bar{\gamma}}{2}.$$

また、 γ と直線との距離は

$$\left| \frac{(\bar{\beta} - \bar{\alpha})\gamma - (\beta - \alpha)\bar{\gamma} - \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}{2(\bar{\beta} - \bar{\alpha})} \right| = \left| \frac{\gamma + \alpha\beta\bar{\gamma} - \alpha - \beta}{2} \right| = \frac{|\alpha + \beta - \gamma - \alpha\beta\bar{\gamma}|}{2}.$$

演習問題 6.1 (1) 点 -1 を通り $\overrightarrow{1+i}$ に平行な直線 (2 点 $-1, i$ を通る直線).

(2) 点 -1 を通り $\overrightarrow{\omega - 1}$ に垂直な直線 (2 点 $-1, i\sqrt{3}$ を通る直線).

(3) 点 0 を通り $\overrightarrow{\omega}$ に平行な直線 (2 点 $0, \omega$ を通る直線).

(4) 点 2 を通り $\overrightarrow{1+i}$ に垂直な直線 (2 点 $2, 2i$ を通る直線).

(いずれも図は略.)

演習問題 6.2 γ から直線に下ろした垂線の足を δ と置くと、 $\overrightarrow{\nu} \parallel \overrightarrow{\gamma\delta}$ より

$$\bar{\nu}(\delta - \gamma) - \nu(\bar{\delta} - \bar{\gamma}) = 0.$$

従って、 $\bar{\nu}\delta + \nu\bar{\delta} + c = 0$ と併せて

$$2\bar{\nu}\delta - \bar{\nu}\gamma + \nu\bar{\gamma} + c = 0,$$

すなわち

$$\delta = \gamma - \frac{\bar{\nu}\gamma + \nu\bar{\gamma} + c}{2\bar{\nu}}$$

を得る. また、 γ と直線との距離は

$$\left| \frac{\bar{\nu}\gamma + \nu\bar{\gamma} + c}{2\bar{\nu}} \right| = \frac{|\bar{\nu}\gamma + \nu\bar{\gamma} + c|}{2|\nu|}.$$

問 7.4 求める接線は $\overrightarrow{\alpha}$ に垂直であるから、その方程式は

$$\bar{\alpha}(z - \alpha) + \alpha(\bar{z} - \bar{\alpha}) = 0,$$

すなわち

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 2|\alpha|^2$$

により与えられる. この式の両辺に α を掛けると、 $|\alpha| = 1$ より

$$z + \alpha^2\bar{z} = 2\alpha$$

を得る. なお、この方程式は問 6.7 の方程式において (形式的に) $\alpha = \beta$ としたもの一致する.

問 7.5 接点を β とすると, 問 7.4 より

$$\alpha + \beta^2 \bar{\alpha} = 2\beta,$$

すなわち

$$\bar{\alpha} \beta^2 - 2\beta + \alpha = 0.$$

これより

$$\beta = \frac{1 \pm i\sqrt{|\alpha|^2 - 1}}{\bar{\alpha}}$$

となることがわかる.

問 7.9 α, β が円の方程式をみたすことは容易にわかる:

$$|\alpha|^2 - \frac{\bar{\alpha} - \mu^2 \bar{\beta}}{1 - \mu^2} \alpha - \frac{\beta - \mu^2 \alpha}{1 - \mu^2} \bar{\alpha} + \frac{\bar{\alpha} \beta - \mu^2 \alpha \bar{\beta}}{1 - \mu^2} = 0, \quad |\beta|^2 - \frac{\bar{\alpha} - \mu^2 \bar{\beta}}{1 - \mu^2} \beta - \frac{\beta - \mu^2 \alpha}{1 - \mu^2} \bar{\beta} + \frac{\bar{\alpha} \beta - \mu^2 \alpha \bar{\beta}}{1 - \mu^2} = 0.$$

また, 命題は円周角の定理とその逆を意味する.

演習問題 7.1 $z \neq \alpha, \beta$ に対して

$$\arg \frac{\beta - z}{\alpha - z} = \arg(\pm 1) \iff \frac{\frac{\beta - z}{\alpha - z}}{\left| \frac{\beta - z}{\alpha - z} \right|} = \pm 1 \iff \frac{\beta - z}{\bar{\beta} - \bar{z}} \cdot \frac{\bar{\alpha} - \bar{z}}{\alpha - z} = 1.$$

ここで

$$(\beta - z)(\bar{\alpha} - \bar{z}) - (\alpha - z)(\bar{\beta} - \bar{z}) = (\bar{\beta} - \bar{\alpha})z - (\beta - \alpha)\bar{z} - \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta.$$

従って, 上の条件をみたす $z (\neq \alpha, \beta)$ の全体は, 2 点 α, β を通る直線 (から α, β を除いたもの) に一致する.

演習問題 7.2 容易に確かめられるように, 恒等式

$$(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma) = (\alpha - \gamma)(\beta - \delta)$$

が成り立つ. 従って, 三角不等式より

$$|(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)| = |(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma)| \leq |(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)| + |(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)|,$$

すなわち

$$|\alpha - \gamma| |\beta - \delta| \leq |\alpha - \beta| |\gamma - \delta| + |\alpha - \delta| |\beta - \gamma|$$

が得られる. ここで, 4 点は相異なると仮定しているから, 等号成立条件は $\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)}$ が正の実数となることである. 他方, 仮定と注意 7.11 より $\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} \cdot \frac{\gamma - \delta}{\alpha - \delta}$ は負の実数であることがわかる. 従って

$$\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)} = - \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} \cdot \frac{\gamma - \delta}{\alpha - \delta}$$

より求める等式を得る.

問 8.2 $T_{i,0}^*$ は直線 $(1-i)z - (1+i)\bar{z} = 0$ (直線 $y = x$) に関する折り返しを表し, $T_{-i,0}^*$ は直線 $(1-i)z + (1+i)\bar{z} = 0$ (直線 $y = -x$) に関する折り返しを表す.

問 8.7 $|\kappa| = |\mu| = 1$ ならば $|\kappa\mu| = |\kappa\bar{\mu}| = 1$ となることと, 命題 8.3 より明らか.

問 8.12 (1) 相異なる 2 点 α, β を結ぶ線分は, パラメータ $t \in \mathbb{R}$ ($0 \leq t \leq 1$) を用いて $(1-t)\alpha + t\beta$ と表すことができる (cf. 例 2.2). 正の相似変換 $T_{\kappa, \lambda}$ によるこの線分の像は

$$\kappa((1-t)\alpha + t\beta) + \lambda = (1-t)(\kappa\alpha + \lambda) + t(\kappa\beta + \lambda)$$

とパラメータ表示され, これは $T_{\kappa, \lambda}(\alpha) = \kappa\alpha + \lambda$ と $T_{\kappa, \lambda}(\beta) = \kappa\beta + \lambda$ を結ぶ線分を表す. 負の相似変換 $T_{\kappa, \lambda}^*$ による像についても同様. なお, 系 8.11 から導いてもよい.

(2) (1) より明らか.

(3) 系 8.10 より明らか.

演習問題 8.1 (1)

$$T_{\kappa, \lambda}(z) = \kappa z + \lambda = \kappa \left(z - \frac{\lambda}{1-\kappa} \right) + \frac{\lambda}{1-\kappa}$$

より, $z_0 = \frac{\lambda}{1-\kappa}$, $\kappa = e^{i\varphi}$ ($\varphi \in \mathbb{R}$) と置くと, $r \in \mathbb{R}$ ($r \geq 0$) と $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$T_{\kappa, \lambda}(z_0 + re^{i\theta}) = z_0 + re^{i(\theta+\varphi)}$$

が成り立つことがわかる. つまり, $T_{\kappa, \lambda}$ は z_0 を中心とする回転を表す.

(2) 2 つの直線に関する折り返しを合成したものは, 負の合同変換を 2 つ合成したものであるから, 正の合同変換である. 従って $T_{\kappa, \lambda}$ と表すことができる. また, 2 直線の交点を z_0 とすると, z_0 はいずれの折り返しでも不変であるから, $T_{\kappa, \lambda}$ でも不変である. つまり $\kappa z_0 + \lambda = z_0$. さらに, 2 直線が平行でないことより, $T_{\kappa, \lambda}$ は恒等写像ではない. 以上より $\kappa \neq 1$ と $z_0 = \frac{\lambda}{1-\kappa}$ がわかり, (1) より主張を得る.

演習問題 8.2 [命題 8.15 の証明] (1) 複素平面の変換 g を $g(z) = \frac{f(z)}{k}$ により定めると,

$$|g(z) - g(w)| = \left| \frac{f(z)}{k} - \frac{f(w)}{k} \right| = \frac{|f(z) - f(w)|}{k} = |z - w|.$$

従って, 定理 8.13 より g は合同変換である. これより直ちに f が相似変換であることがわかる.

(2) 仮定は

$$\frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|} = \frac{|f(z') - f(w')|}{|z' - w'|}$$

とも書ける. この条件は $\frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|}$ が z, w の選び方に依らず一定であることを意味している. よって, この値を k と置いて (1) を適用すればよい. $\square$

問 9.3 正に相似であることは

$$\frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'} = \frac{\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2}}{\frac{\gamma+\alpha}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$$

による. また,

$$\frac{\beta' - \alpha'}{\beta - \alpha} = \frac{\gamma' - \alpha'}{\gamma - \alpha} = -\frac{1}{2}$$

を κ と置き,

$$\alpha' - \kappa\alpha = \beta' - \kappa\beta = \gamma' - \kappa\gamma = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

を λ と置けば, $f := T_{\kappa, \lambda}$ は

$$f(\alpha) = \alpha', \quad f(\beta) = \beta', \quad f(\gamma) = \gamma'$$

をみたす.

問 9.4 $\overline{\alpha'}, \overline{\beta'}, \overline{\gamma'}$ をそれぞれ $\alpha'', \beta'', \gamma''$ と置くと, $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ と $\triangle\alpha''\beta''\gamma''$ は負に相似で, $\frac{\gamma'' - \alpha''}{\beta'' - \alpha''} = \overline{\left(\frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'}\right)}$ が成り立つ. 従って

$$\triangle\alpha\beta\gamma \text{ と } \triangle\alpha'\beta'\gamma' \text{ は負に相似} \iff \triangle\alpha\beta\gamma \text{ と } \triangle\alpha''\beta''\gamma'' \text{ は正に相似,}$$

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \overline{\left(\frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'}\right)} \iff \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\gamma'' - \alpha''}{\beta'' - \alpha''}.$$

よって命題 9.1 より求める同値性を得る.

問 9.6 仮定より直ちに $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \overline{\left(\frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'}\right)}$ となることがわかるから, 問 9.4 より主張を得る.

問 9.9 仮定より, $\alpha'' := \overline{\alpha'}, \beta'' := \overline{\beta'}, \gamma'' := \overline{\gamma'}$ は

$$\arg \frac{\gamma'' - \alpha''}{\beta'' - \alpha''} = -\arg \frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'} = \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}, \quad \arg \frac{\gamma'' - \beta''}{\alpha'' - \beta''} = -\arg \frac{\gamma' - \beta'}{\alpha' - \beta'} = \arg \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}$$

をみたすから, 定理 9.7 より, $\triangle\alpha\beta\gamma$ と $\triangle\alpha''\beta''\gamma''$ は正に相似である. 他方 $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ と $\triangle\alpha''\beta''\gamma''$ は負に相似であるから, $\triangle\alpha\beta\gamma$ と $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ は負に相似である.

演習問題 9.1 正の相似変換

$$f(z) = \frac{\beta - \alpha}{\omega - 1} z + \frac{\omega\alpha - \beta}{\omega - 1}$$

は

$$f(1) = \frac{\beta - \alpha}{\omega - 1} + \frac{\omega\alpha - \beta}{\omega - 1} = \alpha, \quad f(\omega) = \frac{\beta - \alpha}{\omega - 1} \omega + \frac{\omega\alpha - \beta}{\omega - 1} = \beta$$

ならびに

$$f(\omega^2) = \frac{\beta - \alpha}{\omega - 1} \omega^2 + \frac{\omega\alpha - \beta}{\omega - 1} = -\omega\alpha + (\omega + 1)\beta = -\omega\alpha - \omega^2\beta = -\omega(\alpha + \omega\beta)$$

をみたす. ここで, 仮定より $\alpha + \omega\beta = -\omega^2\gamma$ であるから,

$$f(\omega^2) = \omega^3\gamma = \gamma.$$

また, 負の相似変換

$$g(z) = f(\overline{z}) = \frac{\beta - \alpha}{\omega - 1} \overline{z} + \frac{\omega\alpha - \beta}{\omega - 1}$$

は

$$g(1) = f(1) = \alpha, \quad g(\omega^2) = f(\omega) = \beta, \quad g(\omega) = f(\omega^2) = \gamma$$

をみたす.

演習問題 9.2 まず f が正の相似変換の場合, $f = T_{\kappa, \lambda}$ とすると,

$$\begin{aligned}\alpha' \overline{\beta'} + \beta' \overline{\gamma'} + \gamma' \overline{\alpha'} &= (\kappa\alpha + \lambda)(\overline{\kappa\beta + \lambda}) + (\kappa\beta + \lambda)(\overline{\kappa\gamma + \lambda}) + (\kappa\gamma + \lambda)(\overline{\kappa\alpha + \lambda}) \\ &= |\kappa|^2 (\alpha \overline{\beta} + \beta \overline{\gamma} + \gamma \overline{\alpha}) + \kappa \overline{\lambda} (\alpha + \beta + \gamma) + \overline{\kappa} \lambda (\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma}) + 3|\lambda|^2.\end{aligned}$$

ここで

$$\kappa \overline{\lambda} (\alpha + \beta + \gamma) + \overline{\kappa} \lambda (\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma}) = 2 \operatorname{Re}(\kappa \overline{\lambda} (\alpha + \beta + \gamma)) \in \mathbb{R}.$$

また, 明らかに $3|\lambda|^2 \in \mathbb{R}$. 従って

$$\operatorname{Im}(\alpha' \overline{\beta'} + \beta' \overline{\gamma'} + \gamma' \overline{\alpha'}) = k^2 \operatorname{Im}(\alpha \overline{\beta} + \beta \overline{\gamma} + \gamma \overline{\alpha})$$

となる. 次に f が負の相似変換の場合, $f = T_{\kappa, \lambda}^*$ とすると, 同様にして

$$\alpha' \overline{\beta'} + \beta' \overline{\gamma'} + \gamma' \overline{\alpha'} = |\kappa|^2 (\overline{\alpha} \beta + \overline{\beta} \gamma + \overline{\gamma} \alpha) + \kappa \overline{\lambda} (\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma}) + \overline{\kappa} \lambda (\alpha + \beta + \gamma) + 3|\lambda|^2$$

ならびに

$$\operatorname{Im}(\alpha' \overline{\beta'} + \beta' \overline{\gamma'} + \gamma' \overline{\alpha'}) = -k^2 \operatorname{Im}(\alpha \overline{\beta} + \beta \overline{\gamma} + \gamma \overline{\alpha})$$

がわかる. よって, いずれの場合にも

$$|\operatorname{Im}(\alpha' \overline{\beta'} + \beta' \overline{\gamma'} + \gamma' \overline{\alpha'})| = k^2 |\operatorname{Im}(\alpha \overline{\beta} + \beta \overline{\gamma} + \gamma \overline{\alpha})|$$

が成り立つ. この等式は, 相似比 k の相似変換は三角形の面積を k^2 倍にすることを意味している.

演習問題 10.1 容易.

演習問題 10.2 (1) α' と β' の中点は $\frac{\alpha' + \beta'}{2} = \gamma$ であり, $\overrightarrow{\alpha'\beta'} = \beta' - \alpha' = -2(\beta - \alpha)$ は $\overrightarrow{\alpha\beta} = \beta - \alpha$ に平行である. 従って, α' と β' を結ぶ線分の垂直二等分線は, α と β を通る直線に γ から下ろした垂線に一致する. 同様に, $\triangle \alpha'\beta'\gamma'$ における辺の垂直二等分線は, $\triangle \alpha\beta\gamma$ における頂点から対辺に下ろした垂線でもあることがわかる. よって $\triangle \alpha'\beta'\gamma'$ の外心は $\triangle \alpha\beta\gamma$ の垂心に一致する.

(2) 三角形において, 内角の二等分線と外角の二等分線は垂直である (cf. 注意 6.15). 従って, $\triangle \alpha\beta\gamma$ における (内) 角の二等分線は, $\triangle v_\alpha v_\beta v_\gamma$ における頂点から対辺に下ろした垂線でもある. よって $\triangle v_\alpha v_\beta v_\gamma$ の垂心は $\triangle \alpha\beta\gamma$ の内心に一致する.

問 11.3 問 6.12 と $\tau = \alpha^* + \beta^* + \gamma^*$ より, 求める垂線の足は

$$\frac{\alpha + \beta + \tau - \alpha\beta\overline{\tau}}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha^* + \beta^* + \gamma^* - \alpha\beta(\overline{\alpha^*} + \overline{\beta^*} + \overline{\gamma^*})}{2}$$

となる. ここで, $\alpha\beta = (\gamma^*)^2$ より $\alpha\beta\overline{\gamma^*} = |\gamma^*|^2 \gamma^* = \gamma^*$ がわかるから,

$$\frac{\alpha^* + \beta^* + \gamma^* - \alpha\beta(\overline{\alpha^*} + \overline{\beta^*} + \overline{\gamma^*})}{2} = \frac{\alpha^* + \beta^* - \alpha\beta(\overline{\alpha^*} + \overline{\beta^*})}{2}$$

となり, 求める等式が得られる.

問 11.6 問 6.12 と $v = -\alpha^* - \beta^* + \gamma^*$ より, 求める垂線の足は

$$\frac{\alpha + \beta + v - \alpha\beta\bar{v}}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha^* + \beta^* - \gamma^* - \alpha\beta(\bar{\alpha}^* + \bar{\beta}^* - \bar{\gamma}^*)}{2}$$

となる. ここで, 問 11.3 と同様に $\alpha\beta\bar{\gamma}^* = \gamma^*$ であるから,

$$\frac{\alpha^* + \beta^* - \gamma^* - \alpha\beta(\bar{\alpha}^* + \bar{\beta}^* - \bar{\gamma}^*)}{2} = \frac{\alpha^* + \beta^* - \alpha\beta(\bar{\alpha}^* + \bar{\beta}^*)}{2}$$

となり, 求める等式が得られる.

演習問題 11.1 仮定や記号は §11 の通りとするとき, $\angle\alpha$ の外角の二等分線とは, α を通り $\overrightarrow{\alpha\alpha^*} = \alpha^* - \alpha$ に垂直な直線に他ならないから,

$$(\bar{\alpha}^* - \bar{\alpha})(z - \alpha) + (\alpha^* - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = 0$$

により与えられる. ここで, $\alpha\alpha^*(\bar{\alpha}^* - \bar{\alpha}) = |\alpha^*|^2\alpha - |\alpha|^2\alpha^* = \alpha - \alpha^*$ であるから, 上の方程式は

$$z - \alpha - \alpha\alpha^*(\bar{z} - \bar{\alpha}) = 0,$$

すなわち

$$z - \alpha\alpha^*\bar{z} = \alpha - \alpha^*$$

に同値である. なお, この直線は $-\alpha^*$ を通り, $-\alpha^* = \alpha$ の場合には単位円 $|z| = 1$ の接線

$$z - \alpha^2\bar{z} = 2\alpha$$

となる. $\angle\beta$ の外角の二等分線についても同様.

演習問題 11.2 仮定や記号は §11 の通りとするとき:

(1) 外接円上の点 δ と垂心 σ との midpoint は $\frac{\delta + \sigma}{2}$ であり, この点と九点円の中心 $\frac{\sigma}{2}$ との距離は

$$\left| \frac{\delta + \sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \frac{|\delta|}{2} = \frac{1}{2}$$

となる. これより直ちに主張を得る.

(2) 例えば, 傍心 $v_\gamma = -\alpha^* - \beta^* + \gamma^*$ と傍心 $v_\beta = -\alpha^* + \beta^* - \gamma^*$ の midpoint は $\frac{v_\gamma + v_\beta}{2} = -\alpha^*$ であり, これは外接円上の点である.

演習問題 12.1 仮定や記号は §12 の通りとするとき, 直線 $l_{\alpha,\beta}$ は $\omega\eta^2\zeta - \alpha = \omega\eta^2\zeta - 1$ に平行であるから, 直線 $l_{\alpha,\beta}^*$ は

$$e^{-\pi i/3}(\omega\eta^2\zeta - 1) = -\omega(\omega\eta^2\zeta - 1) = -\omega^2\eta^2\zeta + \omega$$

に平行である (かつ $\alpha = 1$ を通る). 従って

$$l_{\alpha,\beta}^*: (\overline{-\omega^2\eta^2\zeta + \omega})(z - 1) - (-\omega^2\eta^2\zeta + \omega)(\bar{z} - 1) = 0.$$

また, 直線 $l_{\alpha,\gamma}$ は $\omega^2\eta\zeta^2 - \alpha = \omega^2\eta\zeta^2 - 1$ に平行であるから, 直線 $l_{\alpha,\gamma}^*$ は

$$e^{\pi i/3}(\omega^2\eta\zeta^2 - 1) = -\omega^2(\omega^2\eta\zeta^2 - 1) = -\omega\eta\zeta^2 + \omega^2$$

に平行である (かつ $\alpha = 1$ を通る). 従って

$$l_{\alpha,\gamma}^* : (\overline{-\omega\eta\zeta^2 + \omega^2})(z-1) - (-\omega\eta\zeta^2 + \omega^2)(\bar{z}-1) = 0.$$

これらの方程式を整理して

$$l_{\alpha,\beta}^* : z + \eta^2\zeta\bar{z} = 1 + \eta^2\zeta, \quad l_{\alpha,\gamma}^* : z + \eta\zeta^2\bar{z} = 1 + \eta\zeta^2$$

を得る.