

2 進法の話*

佐藤 篤†

§1 2 進法とは

1.1 10 進法と 2 進法

我々は通常 1234 という数を “イチニサンシ” ではなく “センニヒャクサンジュウヨン” と読むが, それは 1, 2, 3, 4 を 1234 と並べたものが

$$1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

を意味するという決まりになっているからである. このように, $0 \leq a_k < 10$ をみたす整数 a_k を用いて

$$a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \left(+ a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \cdots \right)$$

と表される数を

$$a_n \cdots a_2 a_1 a_0 \left(. a_{-1} a_{-2} \cdots \right)$$

と書くことを **10 進法表示** という. 同様に, $0 \leq a_k < 2$ をみたす整数 a_k を用いて

$$a_n \cdot 2^n + \cdots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 \left(+ a_{-1} \cdot 2^{-1} + a_{-2} \cdot 2^{-2} + \cdots \right)$$

と表される数を

$$a_n \cdots a_2 a_1 a_0 \left(. a_{-1} a_{-2} \cdots \right)$$

と書くことを **2 進法表示** という. $0 \leq a_k < 2$ をみたす整数 a_k は 0 と 1 に限るから, 2 進法表示では 0 と 1 の 2 文字しか使われない.

*第 12 回仙台数学セミナー (2005 年 8 月 18 日 – 20 日) 配布資料に加筆修正 [2005 年 8 月 30 日版]

†東北大学大学院理学研究科数学専攻 (E-mail: atsushi@math.tohoku.ac.jp)

通常, 2 進法表示を用いる際には右下に小さく “(2)” をつけて 10 進法表示と区別する. また, これも 10 進法表示と区別するため, 2 進法表示を読むときには位取りを無視して左から順に数字 (0 か 1) を読む. 例えば $1011_{(2)}$ は “イチゼロイチイチ カッコニ” と読む. この数は 10 進法表示では

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11$$

となる.

練習問題 1.1 $100011_{(2)}$ の 10 進法表示を求めよ.

1.2 2 進展開

与えられた 0 以上の整数 a を 2 進法で表示するためには

$$(*) \quad a = a_n \cdot 2^n + \cdots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 \quad (\text{各 } a_k \text{ は } 0 \text{ または } 1)$$

となるような整数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ を求めなければならない. すなわち, a を

$$2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad \dots$$

のいくつかの和として表さなければならない (ただし同じ数を 2 回以上使ってはならない). $(*)$ を a の **2 進展開** と呼ぶ.

例 1.2 0 から 15 までの整数の 2 進展開と 2 進法表示は次のようになる:

	2 進展開	2 進法表示
0	0	$0_{(2)}$
1	1	$1_{(2)}$
2	2	$10_{(2)}$
3	$2 + 1$	$11_{(2)}$
4	4	$100_{(2)}$
5	$4 + 1$	$101_{(2)}$
6	$4 + 2$	$110_{(2)}$
7	$4 + 2 + 1$	$111_{(2)}$

	2 進展開	2 進法表示
8	8	$1000_{(2)}$
9	$8 + 1$	$1001_{(2)}$
10	$8 + 2$	$1010_{(2)}$
11	$8 + 2 + 1$	$1011_{(2)}$
12	$8 + 4$	$1100_{(2)}$
13	$8 + 4 + 1$	$1101_{(2)}$
14	$8 + 4 + 2$	$1110_{(2)}$
15	$8 + 4 + 2 + 1$	$1111_{(2)}$

さて, (*) の右辺を 2 で割ると, 商が $a_n \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 2^1 + a_1 \cdot 2^0$ で余りが a_0 となる:

$$a_n \cdot 2^n + \cdots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 = 2(a_n \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 2^1 + a_1 \cdot 2^0) + a_0.$$

従って, a を 2 で割ったときの商を q , 余りを r とすると

$$q = a_n \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 2^1 + a_1 \cdot 2^0, \quad r = a_0$$

となり, 後者の式より a_0 の値がわかる (具体的には a が偶数ならば $a_0 = 0$ で a が奇数ならば $a_0 = 1$ となる). さらに, 前者の式に対して同様の操作を繰り返すことにより $a_1, a_2, \dots, a_n$ を求めることができる. つまり, a を次々に 2 で割って行くと, その際の余りとして $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ の値を順に得ることができる.

例 1.3 26 を次々に 2 で割って

$$\begin{array}{rcl} 2 \overline{) 26} & & \\ 2 \overline{) 13 \cdots 0} & 26 \div 2 = 13 \cdots 0 & \\ 2 \overline{) 6 \cdots 1} & 13 \div 2 = 6 \cdots 1 & \\ 2 \overline{) 3 \cdots 0} & 6 \div 2 = 3 \cdots 0 & \\ 2 \overline{) 1 \cdots 1} & 3 \div 2 = 1 \cdots 1 & \\ 0 \cdots 1 & 1 \div 2 = 0 \cdots 1 & \end{array}$$

(ここでは “...” は余りを表す) と計算することにより, 26 の 2 進展開は

$$26 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

となることがわかり, 2 進法表示 $26 = 11010_{(2)}$ が得られる.

練習問題 1.4 (i) $0 \leq a < 2^n$ をみたす整数 a は

$$a = a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

なる形に 2 進展開されることを示せ.

(ii) 2 進展開は一意的であることを示せ. すなわち

$$a_n \cdot 2^n + \cdots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 = b_n \cdot 2^n + \cdots + b_2 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0$$

(各 a_k, b_k は 0 または 1) ならば

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \dots, \quad a_n = b_n$$

となることを示せ.

1.3 数当てゲーム

先にも述べたように、2 進法表示では 0 と 1 の 2 文字しか使われない。この“2 文字だけ”という性質を利用すると、以下のような数当てゲームができる：

(a) まず、出題者は 1 から 31 までの整数が書かれた次のようなカードを用意する：

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

カード A

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

カード B

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

カード C

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

カード D

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

カード E

(b) 次に、出題者は回答者に 1 から 31 までの整数をひとつ決めてもらい、その数が書いてあるカードを全て挙げてもらう。(c) 挙げられたカードの左上に書いてある数を全て足し合わせると、回答者が決めた数になる。

例 1.5 (i) 13 が書いてあるカードは A, C, D の 3 枚で、左上の数を足し合わせると

$$1 + 4 + 8 = 13.$$

(ii) 27 が書いてあるカードは A, B, D, E の 4 枚で、左上の数を足し合わせると

$$1 + 2 + 8 + 16 = 27.$$

このゲームを成立させているのは“0 から 31 までの整数は

$$a_4 a_3 a_2 a_1 a_0 \text{ (2)} = a_4 \cdot 2^4 + a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 \quad (\text{各 } a_k \text{ は 0 または 1})$$

なる形に一意的に表される”という事実である（練習問題 1.4 を参照のこと）。カード A に書かれているのは $a_0 = 1$ となるような数で、このカードが挙げられたかどうかで a_0 の値を知ることができる。同様に、カード B, C, D, E が挙げられたかどうかで a_1, a_2, a_3, a_4 の値を知ることができるという仕組みになっている。

§2 2 進法と計算

2.1 繰り返し 2 乗法

a の n 乗 $a^n = a \cdot a \cdots a$ を計算するためには, $n - 1$ 回の掛け算を行う必要があるように思えるが, 次の例のように n の 2 進展開を利用すれば計算の回数を節約できる:

例 2.1 30 の 2 進展開

$$30 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 16 + 8 + 4 + 2$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 30} \\ 2 \overline{) 15 \cdots 0} \\ 2 \overline{) 7 \cdots 1} \\ 2 \overline{) 3 \cdots 1} \\ 2 \overline{) 1 \cdots 1} \\ 0 \cdots 1 \end{array}$$

ならびに

$$3 \xrightarrow{2 \text{ 乗}} 3^2 = 9 \xrightarrow{2 \text{ 乗}} 3^4 = 81 \xrightarrow{2 \text{ 乗}} 3^8 = 6561 \xrightarrow{2 \text{ 乗}} 3^{16} = 43046721$$

より

$$3^{30} = 3^{16} \cdot 3^8 \cdot 3^4 \cdot 3^2 = 43046721 \cdot 6561 \cdot 81 \cdot 9 = 205891132094649.$$

掛け算の回数は全部で 7 回で済んだ (実際には, これに加えて 30 の 2 進展開を求めるために割り算を 5 回行っている).

上の例のような計算法を繰り返し 2 乗法という. 一般に, 繰り返し 2 乗法を用いると約 $2 \log_2 n$ 回の掛け算で n 乗の計算ができる (加えて n の 2 進展開を求めるために割り算を約 $\log_2 n$ 回行う必要がある).

2.2 ロシア農民の掛け算

次の計算例も 2 進展開の応用である:

例 2.2 19 と 23 の積は, 普通に筆算で計算することもできるが, 次のような手順で求めることもできる:

19	23	23	$\left(\begin{array}{l} \text{1 列目: 19 を次々に 2 で割る (余りは無視)} \\ \text{2 列目: 23 を次々に 2 倍する} \\ \text{3 列目: 1 列目が奇数の所だけ 2 列目の和をとる} \end{array} \right)$
9	46	46	
4	92		
2	184		
1	368	+ 368	
		437	

1 列目は 19 の 2 進展開を求める計算と同様で、これより $19 = 2^4 + 2^1 + 2^0$ がわかる。これと 2 列目, 3 列目より

$$19 \cdot 23 = (2^4 + 2^1 + 2^0) \cdot 23 = 368 + 46 + 23 = 437$$

となるというのが上の計算である。

上の例のような掛け算の計算法をロシア農民の掛け算という。

2.3 2 進法表示された数の計算

2 進法で表示された数同士の足し算は、普通の 10 進法での筆算と同様にできる。10 進法で足し算を行うためには 0 から 9 までの整数の和を知っておく必要があったが、2 進法では

$$0_{(2)} + 0_{(2)} = 0_{(2)}, \quad 0_{(2)} + 1_{(2)} = 1_{(2)} + 0_{(2)} = 1_{(2)}, \quad 1_{(2)} + 1_{(2)} = 10_{(2)}$$

だけを覚えておけば十分である。引き算についても普通の筆算と同様で、繰り下がりパターンとして $10_{(2)} - 1_{(2)} = 1_{(2)}$ だけを覚えておけばよい。

例 2.3 (i) $18 = 10010_{(2)}$ と $23 = 10111_{(2)}$ の和の計算。

10 進法	2 進法
18	$10010_{(2)}$
+ 23	+ $10111_{(2)}$
41	$101001_{(2)}$

(ii) $21 = 10101_{(2)}$ と $12 = 1100_{(2)}$ の差の計算。

10 進法	2 進法
21	$10101_{(2)}$
- 12	- $1100_{(2)}$
9	$1001_{(2)}$

2 進法で表示された数同士の掛け算も、普通の 10 進法での筆算と同様にできる。今度は九九を暗記する代わりに

$$0_{(2)} \cdot 0_{(2)} = 0_{(2)}, \quad 0_{(2)} \cdot 1_{(2)} = 1_{(2)} \cdot 0_{(2)} = 0_{(2)}, \quad 1_{(2)} \cdot 1_{(2)} = 1_{(2)}$$

だけを覚えておけばよい. 割り算についても普通の筆算と同様である. 10 進法での割り算では “商として何を立てるか” が面倒であったが, 2 進法では商に関して頭を悩ますことはない.

例 2.4 (i) $14 = 1110_{(2)}$ と $3 = 11_{(2)}$ の積の計算 (2 進法を意味する “(2)” は略).

10 進法	2 進法
$\begin{array}{r} 14 \\ \times 3 \\ \hline 42 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1110 \\ \times 11 \\ \hline 1110 \\ 1110 \\ \hline 101010 \end{array}$

(ii) $41 = 101001_{(2)}$ の $3 = 11_{(2)}$ による商と余りの計算 (2 進法を意味する “(2)” は略).

10 進法	2 進法
$\begin{array}{r} 13 \\ 3 \overline{) 41} \\ \underline{3} \\ 11 \\ \underline{9} \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1101 \\ 11 \overline{) 101001} \\ \underline{11} \\ 100 \\ \underline{11} \\ 101 \\ \underline{11} \\ 10 \end{array}$

2.4 反転を利用した引き算の計算

$0 \leq a < 2^n$ をみたす整数 a の 2 進法表示は $a = a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0_{(2)}$ のように高々 n 桁となる (練習問題 1.4 の (i) を参照のこと). このような整数 a の $2^n = 100 \cdots 0_{(2)}$ に関する反転 $a^* = a_{n-1}^* \cdots a_2^* a_1^* a_0^*_{(2)}$ を

$$a_k^* = \begin{cases} 1 & (a_k = 0 \text{ の場合}) \\ 0 & (a_k = 1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

により定める. すると, 明らかに $a + a^* = 11 \cdots 1_{(2)} = 2^n - 1$ すなわち

$$a^* + 1 - 2^n = -a$$

が成り立つ. つまり, a^* と 1 を足した後 2^n を引けば, a を引いたことになる. この事実を用いると, 次の例のように足し算だけを用いて引き算を行うことができる:

例 2.5 $1100_{(2)} = 01100_{(2)}$ の $2^5 = 100000_{(2)}$ に関する反転は $10011_{(2)}$ であるから,

$$10101_{(2)} + 10011_{(2)} + 1_{(2)} = 101001_{(2)}$$

$$\begin{array}{r} 10101_{(2)} \\ + 10011_{(2)} \\ \hline 101000_{(2)} \\ + 1_{(2)} \\ \hline 101001_{(2)} \end{array}$$

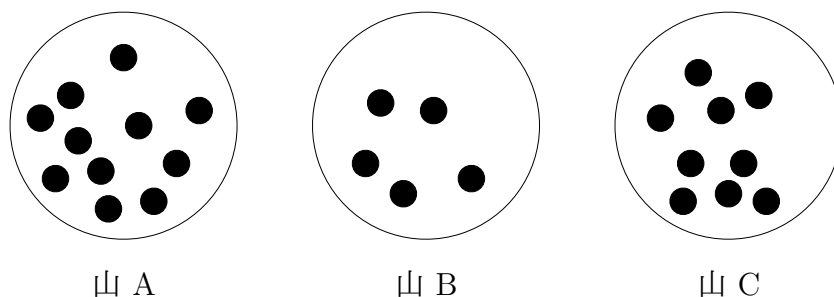
より $10101_{(2)} - 1100_{(2)} = 1001_{(2)}$ がわかる (例 2.3 の (ii) と比較してみよ).

§3 2 進法とゲームの必勝法

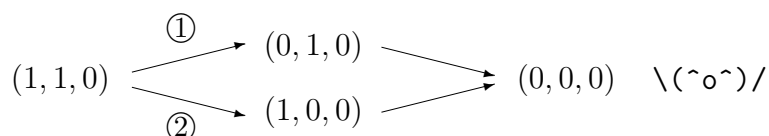
3.1 三山崩しの必勝形

本節で考察する三山崩しとは, (a) 碁石を何個かずつまとめて合計 3 つの山を作り, (b) 2 人で交互に石を取って行き, (c) 最後の石を取った方が勝ち というゲームのことである. ただし, (b) では石を (1 個以上ならば) 何個取っても構わないが, 2 つ以上の山から取ることは禁止とする.

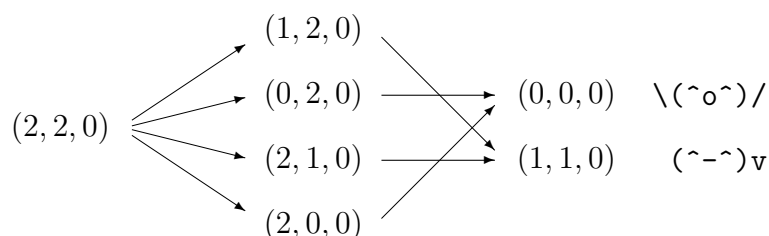
以下では, 3 つの山を “山 A, 山 B, 山 C” と呼ぶことにし, “山 A に a 個, 山 B に b 個, 山 C に c 個石がある” 状態を単に (a, b, c) で表すことにする. 例えば, 下図のような状態は $(11, 5, 9)$ と表す:



このゲームを何回か行くと, “この形に持ち込めば勝った” と言える局面がいくつかあることに気がつく. 例えば, 自分の手番が終わったときに $(1, 1, 0)$ という状態になっていれば, 次に相手ができることは ①山 A から石を 1 個取るか ②山 B から石を 1 個取るかだけであるから, その次の自分の手番で最後に残った石を取って勝ちとなる:



また、自分の手番が終わったときに $(2, 2, 0)$ という状態になっていても、適切な手順を踏めば勝つことができる:



((1, 1, 0) となったときには先に考えた場合に帰着される.) このように “自分の手番が終わったときに、この形になっていれば、あとは (相手の手に応じた) 適切な手順を踏めば必ず勝てるような” 状態を必勝形と呼ぶことにする. 上で述べたように、 $(1, 1, 0)$ や $(2, 2, 0)$ は必勝形の例になっている.

3.2 山が 2 つの場合

先に述べた $(1, 1, 0)$ や $(2, 2, 0)$ の他にも $(3, 3, 0)$ や $(4, 4, 0)$ のように $(n, n, 0)$ の形が必勝形になっている. そのことを示すために、以下しばらく山が 2 つの場合 (二山崩し) を考察することにする. 前と同様に 2 つの山を “山 A, 山 B” と呼び, “山 A に a 個, 山 B に b 個石がある” 状態を (a, b) で表す. この場合には話は簡単で、次が成り立つ:

(a, b) が必勝形であるためには $a = b$ であることが必要かつ十分.

この事実は、良形・悪形という概念を用いて次のように示される:

0 以上の整数 a, b に対し、 $a = b$ のとき (a, b) は良形であると呼び、そうでないとき (a, b) は悪形であると呼ぶことにする. このとき、次が成り立つことが直ちにわかる:

- (I) 終局の形は良形である.
- (II) 良形に任意の 1 手を加えると悪形になる.
- (III) 悪形に適切な 1 手を加えると良形にできる.

(I)–(III) とゲームが有限回の手順で終了すること (これは明らか) より “良形 = 必勝形” であることがわかる. すなわち、ひとたび自分の手が終わったときに良形になっていれば、(II) と (III) より、そこから先の相手の手は常に悪形で終わるようにできるのであるから、(I) より相手が勝つことはあり得ないのである. 言い換えれば、ゲームの開始時に悪形になっていれば先手必勝であり、良形になっていれば後手必勝である. なお、(I) の “終局の

形”とは $(0, 0)$ のことで, (III) の “適切な 1 手” とは “石が多い方の山から何個か取って石の個数を揃える” である.

3.3 2 進和

話を三山崩しに戻そう. もしも二山崩しのときのように条件 (I)–(III) をみたす良形という概念が定義できれば, 同じ理屈によって “良形 = 必勝形” が示せる. 問題は良形をどう定めるかであるが, そのために 0 以上の整数の 2 進和というものを定義する.

0 以上の整数 a, b の 2 進法表示をそれぞれ $a = a_n \cdots a_2 a_1 a_0_{(2)}$, $b = b_n \cdots b_2 b_1 b_0_{(2)}$ とするとき, a と b の **2 進和** $a \oplus b = c_n \cdots c_2 c_1 c_0_{(2)}$ を

$$c_k = \begin{cases} 0 & (a_k = b_k \text{ の場合}) \\ 1 & (a_k \neq b_k \text{ の場合}) \end{cases}$$

により定める. 次の例からもわかるように, 2 進和とは 2 進法表示で繰り上がりを無視した和のことである:

例 3.1 $9 = 1001_{(2)}$, $26 = 11010_{(2)}$ と

$$1001_{(2)} \oplus 11010_{(2)} = 10011_{(2)} \quad \begin{array}{r} 1001_{(2)} \\ \oplus 11010_{(2)} \\ \hline 10011_{(2)} \end{array}$$

より, $9 \oplus 26 = 10011_{(2)} = 19$.

練習問題 3.2 $0 \leq a, b \leq 7$ に対する $a \oplus b$ の値は次の表のようになることを確かめよ:

$a \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

2 進和 $\oplus$ が次の性質をみたすことは容易に示すことができる:

定理 3.3 (i) $a \oplus b = b \oplus a$.

(ii) $0 \oplus a = a \oplus 0 = a$.

(iii) $a \oplus a = 0$.

(iv) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.

上の定理の (iv) は, a, b, c の 2 進和は加える順番 (括弧のつけ方) に依らずに定まるということを述べている. よって, 以下では括弧を省いて $a \oplus b \oplus c$ と書く.

3.4 三山崩しの良形と悪形

以上の準備の下で, 三山崩しの良形を次のように定義する:

0 以上の整数 a, b, c に対し, $a \oplus b \oplus c = 0$ のとき (a, b, c) は良形であると呼び, そうでないとき (a, b, c) は悪形であると呼ぶ.

条件 $a \oplus b \oplus c = 0$ は $a \oplus b = c$ (あるいは $b \oplus c = a$ や $c \oplus a = b$) と同値である. 実際, 定理 3.3 より, $a \oplus b \oplus c = 0$ ならば

$$a \oplus b = a \oplus b \oplus 0 = a \oplus b \oplus c \oplus c = 0 \oplus c = c$$

となり, 逆に $a \oplus b = c$ ならば

$$a \oplus b \oplus c = c \oplus c = 0$$

となる.

我々が示すべきことは, 上で述べた良形・悪形の定義が条件 (I)–(III) をみたすことであるが, それは次の定理より直ちに導かれる:

定理 3.4 (i) $0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$.

(ii) $a \neq a', b \neq b', c \neq c'$ ならば

$$a' \oplus b \oplus c, a \oplus b' \oplus c, a \oplus b \oplus c' \neq a \oplus b \oplus c.$$

(iii) $a \oplus b \oplus c \neq 0$ ならば, 次のいずれかが成り立つ:

$$a \oplus b < c, \quad b \oplus c < a, \quad c \oplus a < b.$$

上の定理のうち, (i) は明らかであり, (ii) も定理 3.3 を用いて容易に示すことができる. 実際, 例えば $a \neq a'$ であるにも関わらず $a \oplus b \oplus c = a' \oplus b \oplus c$ が成り立ったとすると

$$a = a \oplus 0 = (a \oplus b \oplus c) \oplus (b \oplus c) = (a' \oplus b \oplus c) \oplus (b \oplus c) = a' \oplus 0 = a'$$

となり矛盾を生ずる. (iii) については, 証明を述べる代わりに具体例を与えておくことにする:

例 3.5 (i) $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ の場合. $3 \oplus 4 \oplus 5 = 2 \neq 0$ で,

$$3 \oplus 4 = 7 > 5, \quad \underline{4 \oplus 5 = 1 < 3}, \quad 5 \oplus 3 = 6 > 4.$$

従って, 悪形 $(3, 4, 5)$ を良形にするためには, 山 A から石を 2 個取って $(1, 4, 5)$ とすればよい (他の方法では良形にできない).

(ii) $(a, b, c) = (3, 5, 7)$ の場合. $3 \oplus 5 \oplus 7 = 1 \neq 0$ で,

$$\underline{3 \oplus 5 = 6 < 7}, \quad \underline{5 \oplus 7 = 2 < 3}, \quad \underline{7 \oplus 3 = 4 < 5}.$$

従って, 悪形 $(3, 5, 7)$ を良形にするためには, ①山 C から石を 1 個取って $(3, 5, 6)$ とするか ②山 A から石を 1 個取って $(2, 5, 7)$ とするか ③山 B から石を 1 個取って $(3, 4, 7)$ とすればよい (他の方法では良形にできない).

練習問題 3.6 (i) n を 0 以上の偶数とすると, $(1, n, n+1)$ は良形であることを示せ.

(ii) $(2, 3, 5)$ と $(3, 4, 6)$ は共に悪形であることを確認し, 良形にする方法を考えよ.

文献案内

最後に, 本稿で扱った話題に関連する文献をいくつか紹介しておく (筆者が参考にした文献を全て挙げている訳ではない).

[1] 安野 光雅, わが友 石頭計算機, ダイヤモンド社, 1973 年 / 文春文庫, 1987 年.

2 進法を初めとするコンピューターの内部の仕組みについて平易に書かれた名著. ダイヤモンド社版, 文春文庫版とも絶版.

[2] 安野 光雅 (野崎 昭弘 監修), 石頭コンピューター, 日本評論社, 2004 年.

上の “わが友 石頭計算機” を易しく, またコンピューター社会の現状に即した内容に書き直したもの.

- [3] G. H. ハーディー / E. M. ライト (示野 信一 / 矢神 毅 訳), 数論入門 I, II, シュプリ
ンガー数学クラシックス, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2001 年.

世界中で広く読まれている整数論の古典の第 5 版 (1979 年刊) の邦訳. 原著初版は
1938 年刊. 2 進法については, 第 9 章 “数の小数による表現” で述べられている.

- [4] 平山 諦, 東西数学物語 (増補新版), 恒星社厚生閣, 1973 年.

数学に関する古くから知られている話題について, 洋の東西を問わずにまとめられ
た名著. 2 進法については, 第 2 章 “物語, II” の第 9 節 “目付字” で述べられている.

- [5] 一松 信, 石とりゲームの数理, 数学ライブラリー (教養篇) 2, 森北出版, 1968 年.

三山崩しを初めとするゲームの必勝法について詳しい. 現在はオンデマンド印刷で
入手できる.